

VI Rotations

1. π / et m . c

2. Rotation

2.1 matrice

2.1.1 P
2.1.2 r

2.2 rot.
+ vit.

r

3. matrice

3D

3.1 quelque
(3.2 in/)

3.2 formule de

4. Coordonnées c
& s

1. π /

constat empirique: équilibre

leviers



$\vec{F}_1 =$

$\vec{F}_2 =$

$\pi_1 =$

$= \pi_2$

$=$

Autre interprétation: comment

à un

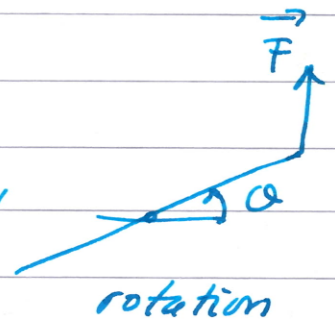
(angle) nouveau concept de telle sorte qu'au niveau de l'énergie on ait une équation du type

$$= \delta W = - \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Nulle quantité à définir

angle
infinitement petit

(Energie) Travail
infinitésimal

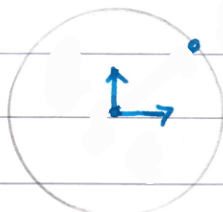


Étudions cette analogie au niveau d'une rotation plane d'un

Comme il s'agit d'une rotation, il y a une contrainte circulaire

$$\vec{OP} =$$

$$= \hat{x} + \hat{y}$$



$$+ = = \|\vec{OP}\|^2$$

↑
contrainte

dérivons la contrainte

$$\Rightarrow dx + dy = 0$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dx + dy$$

car $\vec{F} = \hat{x} + \hat{y}$ introduisons la paramétrisation qui vérifie la contrainte
 $d\vec{r} = \hat{x} + \hat{y}$ $x =$ $y =$

$$\begin{cases} dx = d\theta \\ dy = d\theta \end{cases} \leftarrow \left(\text{i.e. } \dot{x} = \dot{\theta} \right. \\ \left. \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \right)$$

mais $\hat{y} = y$ et $\hat{x} = x$

ainsi $dx = d\theta$

$dy = d\theta$

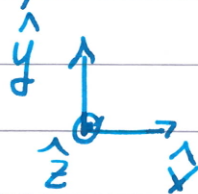
et donc $\delta W = (d\theta) + (d\theta) = () d\theta$

$$\boxed{\Delta}$$

(on retrouve le
mais quelque peu généralisé)

Essayons de transformer cette formule en une formule plus vectorielle

Si on pose $\vec{r} = \hat{z}$
 $\hat{z}$ sort de la feuille de papier
on a



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \hat{z}$$

Si on décompose et
que l'on construit le
parallélogramme

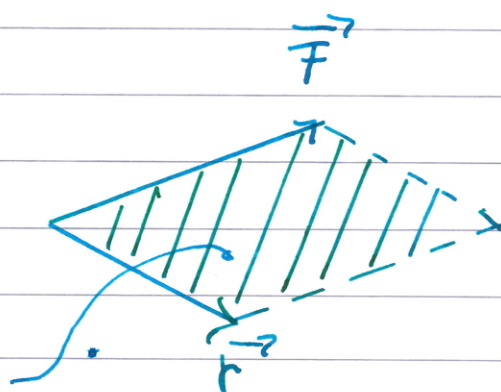
on constate que la
surface est bien donnée
par

$$A =$$

$$\vec{r} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$\vec{F} = \hat{x} + \hat{y}$$

A



Ainsi on est amené à poser

$$\vec{e}_x = \hat{x} = \vec{u}_x$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$\vec{e}_z = \vec{u}_z$$



$\vec{L}$ dépend du point origine. Ainsi on note

$$\vec{L}_O =$$

Définition: Le moment $\vec{L}$ d'un système de forces $\vec{F}_\alpha$ agissant sur des points P_α bien particuliers, moment de force par rapport à un point A donné, est:

$$= \sum_\alpha$$

Généralisation de la loi de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{P} = \sum m_\alpha \vec{V}_\alpha$$

$$\vec{F} =$$

Définition: $\vec{L}_A$ par rapport à un point A.

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha$$

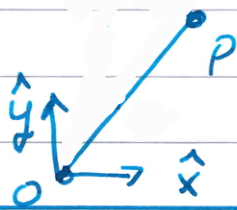
Thm: $\vec{L} = \frac{d}{dt}$

$$\vec{L}_O = \frac{d}{dt} = +$$

2. matrice de rotation plane

2.1 le point tourne, le repère reste fixe

$\vec{OP}$ tourne de θ et se retrouve en $\vec{OQ}$



$$\vec{OP} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$\vec{OQ} = \hat{x} + \hat{y}$$

Existe-t-il une matrice 2×2 qui assure la correspondance

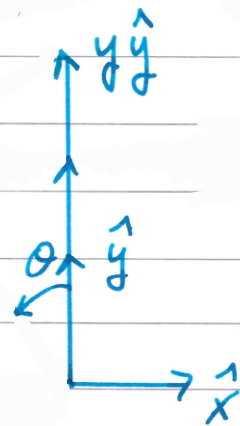
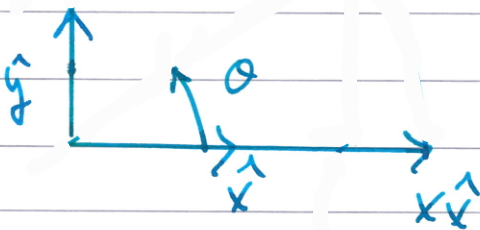
$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})} = \begin{pmatrix} ? \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})}$$

Tournons composante par composante

$$\vec{OQ} = R \vec{OP} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$R \hat{x} = \hat{x} + \hat{y}$$

$$R \hat{y} = \hat{x} + \hat{y}$$



Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

à cause, la

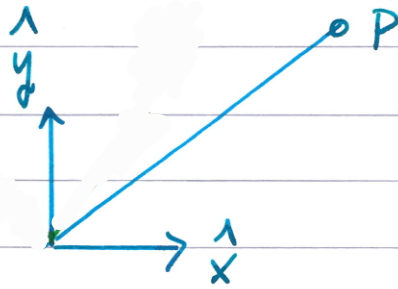
Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

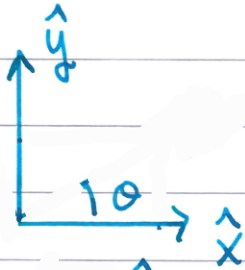
à cause, la

2.2 le point reste fixe, le repère tourne

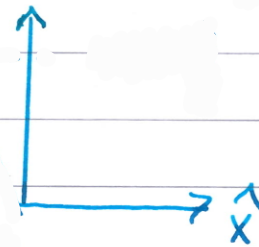
$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y}$$



Exprimons $\hat{x}$ et $\hat{y}$ en fonction de



Exprimons $\hat{x}$ et $\hat{y}$ en fonction de



$$= \hat{x} + \hat{y}$$

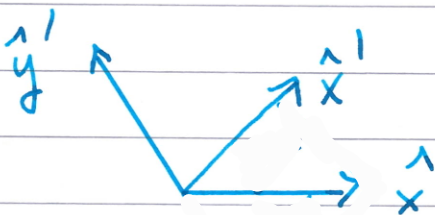
$$= \hat{x} + \hat{y}$$

ainsi $x'\hat{x}' + y'\hat{y}' = x' \left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right) + y' \left(\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \hat{x}' + \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \hat{y}' = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

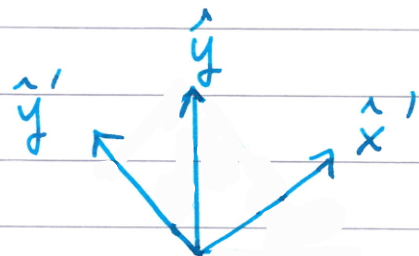
Exprimons $\hat{x}$ en fonction de $\hat{x}'$ et $\hat{y}'$



$$\hat{x} = \hat{x}'$$

$$\hat{y}'$$

$\hat{y}$ en fct de $\hat{x}'$ et $\hat{y}'$



$$\hat{y} = \hat{x}' + \hat{y}'$$

$$\vec{OP} = x \hat{x} + y \hat{y} =$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}' \\ \hat{x}' \end{pmatrix}$$

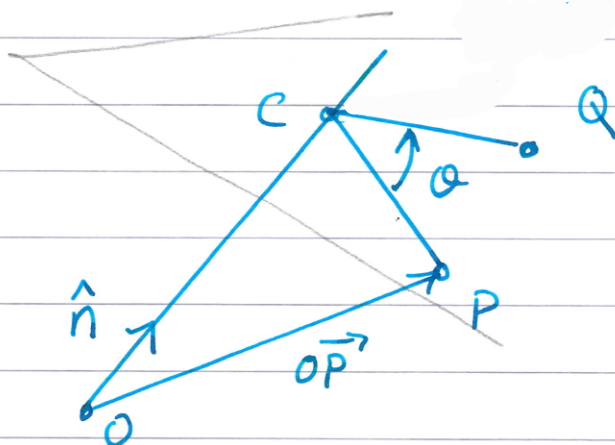
$$= \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} \hat{x}' + \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} \hat{y}'$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}', \hat{y}')} = \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})}$$

3 Rotation 3D

angle θ

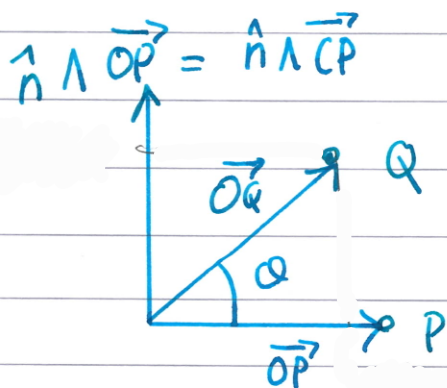
Déterminons la matrice 3×3 qui représente cette rotation.



$\hat{n}$ vecteur générateur de l'axe de norme 1.

$$\|\hat{n}\| = 1.$$

Vu de dessus du plan



$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = \hat{x}_i \\ \vec{OQ} &= \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} = \hat{x}_i \end{aligned}$$

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$\vec{OC} = (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n}$$

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC} = \vec{OP} - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n}$$

$$= \begin{pmatrix} \quad \quad \quad \end{pmatrix} \vec{OP}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{CP} \cos \theta + (\hat{n} \times \vec{CP}) \sin \theta$$

$$\vec{OQ} = (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} + (\vec{OP} - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n}) \cos \theta + \sin \theta (\hat{n} \times \vec{OP})$$

Écriture matricielle

$$\hat{n} \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OP_1 \\ OP_2 \\ OP_3 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{n} \wedge] \vec{OP}$$

$$(\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} = \hat{n}^T (\hat{n} \cdot \vec{OP}) = \hat{n} \hat{n}^T \vec{OP}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OP_1 \\ OP_2 \\ OP_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \vec{OP}$$

On arrive finalement à l'expression de la matrice de rotation d'axe $\hat{n}$ et d'angle ϑ :

3.1

$$R = I + (\hat{n} \wedge) \vartheta + \frac{1}{2} (\hat{n} \wedge)^2 \vartheta^2 + \dots$$

$$\hat{n} \hat{n}^T = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

3.2 $R(d\vartheta) = I + (\hat{n} \wedge) d\vartheta$

3.3 Formule de Poisson

$$\dot{\vec{OP}} = \frac{\vec{OP}(t+dt) - \vec{OP}(t)}{dt} = (R - I) \frac{\vec{OP}}{dt}$$

$$R(d\vartheta) = R(0) + \frac{\partial R}{\partial \vartheta} d\vartheta = I + (\hat{n} \wedge) d\vartheta$$

$$\dot{\vec{OP}} = (\hat{n} \wedge) \frac{\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{n} \wedge \vec{OP}$$

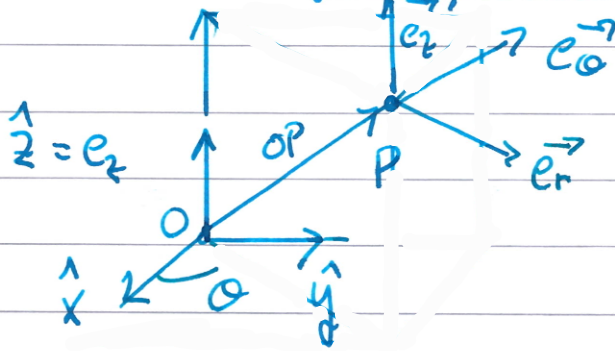
$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \vec{OP} \quad \vec{\omega} \triangleq \frac{d\vartheta}{dt} \hat{n}$$

Formule de Poisson

$$\dot{\vec{OP}} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

4 coordonnées cylindriques et sphériques

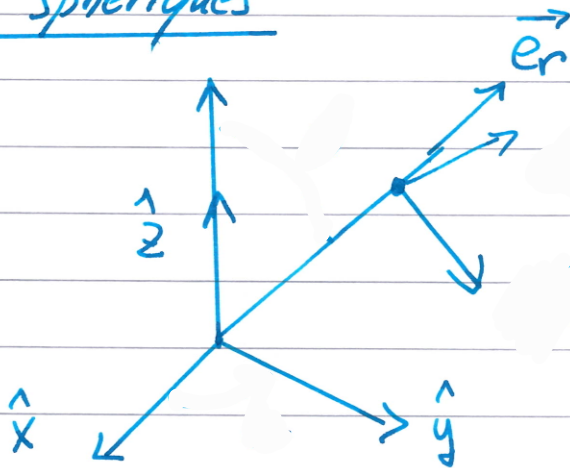
4.1 cylindriques



$$\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

4.2 sphériques



$$\begin{cases} x = \\ y = \\ z = \end{cases}$$

Soit le repère cylindrique qui se déplace :

le repère effectue une rotation instantanée selon l'axe $\hat{z}$ et d'un angle $d\theta$.

$$\vec{\omega} = \vec{e}_z \quad \dot{\vec{e}}_z =$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \quad = \quad =$$

par calcul

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{vmatrix} =$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \end{vmatrix} =$$

Vitesse et accélération d'un point matériel à l'aide du repère cylindrique en déplacement

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{OP}} =$$

$$=$$

(Leibniz)

(Poisson)



les quantités au final s'expriment dans le repère galiléen.

(les vit et accélérations sont tjrs celles absolues)

$$\ddot{\vec{OP}} =$$

$$= \underbrace{\quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}_{\text{(Leibniz)}} + \underbrace{\quad - \quad}_{\text{(Poisson)}} = \left(\quad \right) \vec{e}_r + \left(\quad \right) \vec{e}_\theta$$

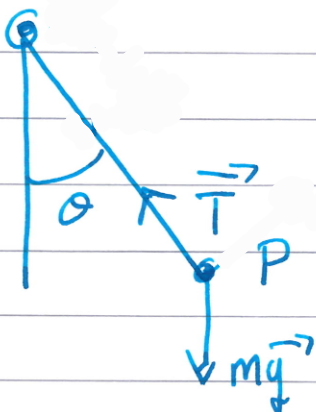
Accélération absolue du point matériel mais exprimée dans le repère cylindrique qui se déplace.

⇒ de manière analogue pour les coordonnées sphériques (exercices + slides)

⚠ à bien calculer $\vec{\omega}$ avant d'utiliser Poisson.



Exemple: coordonnées cylindriques: le pendule plan



$$\vec{OP} =$$

$$\vec{T} =$$

$$m\vec{g} =$$

Newton: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

pendule plan (suite) $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\vec{a} = \vec{e}_r + \vec{e}_\theta$$

$$\vec{e}_r + \vec{e}_\theta =$$

$$\vec{e}_r] : T =$$

$$\vec{e}_\theta] : m\ddot{\theta} =$$

En utilisant $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$, on a exprimé les accélérations dans ^(absolues) ^(Galiléenne) dans le repère embarqué? selon les axes directions ^{p.r. aux référentiels} $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$, ou plutôt, projetées/décomposées dans ce repère.

⚠ Ce n'est pas l'accélération mesurée dans ce repère!

C'est la raison pour laquelle on a pu appliquer les

lois de Newton. Le référentiel est resté celui (immobile) Galiléen. Le repère de cylindrique n'est utilisé pour définir un nouveau référentiel.