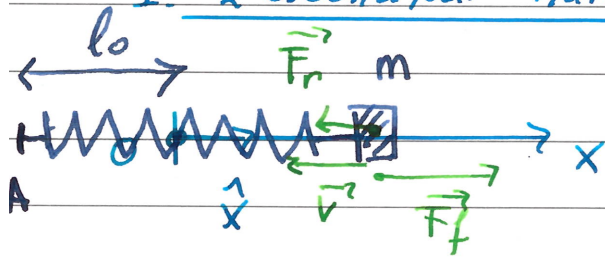


V Oscillateur harmonique II

①

1. Oscillateur amorti
2. Oscillateur amorti et forcé
3. Battement (non amorti et forcé)
4. Résonance (forcé, cas général)

1. L'oscillateur harmonique amorti



$$\|\vec{AO}\| = l_0$$

fixé en A. O au niveau de l_0 .

$$\ddot{x} = -\frac{b}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x$$

b coefficient de frottement visqueux.

$$\vec{AO} = l_0 \hat{x} \quad m \vec{AP} = -k (\vec{AP} - l_0 \vec{AP}) + \vec{F}_f = \vec{F}_r + \vec{F}_f$$

modèle de la force de frottement: $\vec{F}_f = -b \cdot \vec{v} = -b \vec{AP} \cdot \hat{x} = -b \vec{OP} \cdot \hat{x} = -b \dot{x} \hat{x}$

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = 0 + \dot{x} \hat{x}$$

$$\vec{AP} - l_0 \vec{AP} =$$

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = 0 + \ddot{x} \hat{x}$$

$$\vec{AO} + \vec{OP} - l_0 \hat{x} = \vec{OP} \\ - l_0 \hat{x} + \dot{x} \hat{x} - l_0 \hat{x} = \dot{x} \hat{x}$$

$$m \ddot{x} \hat{x} = -k \dot{x} \hat{x} - b \dot{x} \hat{x}$$

Solution de l'équation différentielle $\ddot{x} = -\frac{b}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x$

C'est une équation homogène.

que l'on peut écrire sous la forme

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\gamma = \frac{b}{2m}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

la pulsation en absence d'amortissement

(2)

- c'est une équ. diff. linéaire à coefs. constants et homogène.
 $\Rightarrow$ - (💡) - idée: transformer l'opérateur $\frac{d}{dt}$ en une variable λ

On transforme l'équation diff. en une équation polynomiale. Puis on calcule les solutions λ_i et on pose $x = \sum A_i e^{\lambda_i t}$

avec A_i des constantes d'intégration.

Rec effet

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda_i t} = \lambda_i e^{\lambda_i t}$$

et donc si $x = e^{\lambda_i t}$ $\dot{x} = \lambda_i x$ $\ddot{x} = \lambda_i^2 x$ etc.
 de même si $x = \sum A_i e^{\lambda_i t}$, $\dot{x} = \sum A_i \lambda_i e^{\lambda_i t}$

Transformons l'équation en posant $\lambda \doteq \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x &= \frac{d^2}{dt^2} x + \frac{b}{m} \frac{d}{dt} x + \frac{k}{m} x \\ &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{d}{dt} + \frac{k}{m} \right) x = \left(\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} \right) x \end{aligned}$$

(comme $\left(\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} \right) x = 0$ et $x \neq 0$
 on doit avoir $\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$.)

$\Rightarrow$ Résolution de l'équation algébrique.

3 cas sont à envisager

$$\textcircled{a} \quad \frac{b^2}{m^2} < \frac{4k}{m} \quad \textcircled{b} \quad \frac{b^2}{m^2} = \frac{4k}{m} \quad \textcircled{c} \quad \frac{b^2}{m^2} > \frac{4k}{m}$$

Les solutions algébriques

$$\lambda_{1,2} = \left(-\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - \frac{4k}{m}} \right) = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

(a) λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$

(c) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(a) $\frac{b^2}{m^2} < \frac{4k}{m}$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t} \left(C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t} \right)$$

$$= e^{-\frac{b}{2m}t} \left[C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}t\right) \right]$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{b^2}{m^2} = \frac{4k}{m}$

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + C_2 t e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $\frac{b^2}{m^2} > \frac{4k}{m}$

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{b}{2m} + \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{b}{2m} - \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$
déterminent alors les constantes C_1 et C_2 .

La solution particulière est la solution nulle.

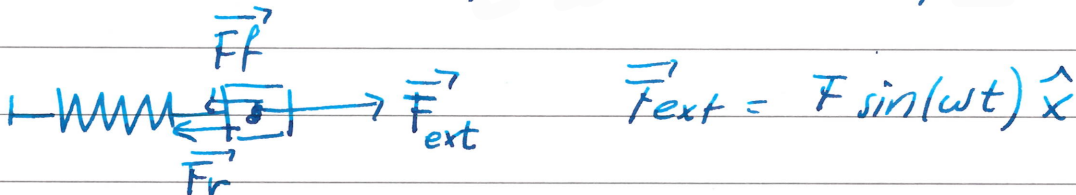
2. Oscillateur forcé amorti

Egu. différentielle $\ddot{x} = -\frac{b}{m} \dot{x} - \frac{k}{m} x + A \sin(\omega t)$

ω : pulsation [rad/s] de l'accélération imposée au ressort ^{sys: masse} avec amortisseur. A : [m/s²]

Si l'équ. est de la forme $m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx + F \sin(\omega t)$

F [N] : valeur maximale de la force sinusoïdale imposée à la masse depuis l'extérieur.



2.1 Résolution de l'équation différentielle

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

solution homogène : $\ddot{x}_h = -\frac{b}{m} \dot{x}_h - \frac{k}{m} x_h$

solution particulière de $\ddot{x}_p = -\frac{b}{m} \dot{x}_p - \frac{k}{m} x_p + A \sin(\omega t)$
(quelconque)

La solution homogène a déjà été obtenue paramétrée par (constantes d'intégration C_1, C_2). C_1, C_2 .

La solution particulière est choisie en superposant un sinus et un cosinus à la même fréquence ω que le terme forçant.

(5)

on pose $x_p(t) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)$
 avec $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Représente le mouvement vers lequel le système tend asymptotiquement, une fois le transitoire due aux conditions initiales a disparu. (solution homogène)

A résoudre: $x_p'' + \frac{b}{m} \dot{x}_p + \frac{k}{m} x = A \sin(\omega t)$

$$x_p(t) = \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_p = \alpha_0 \omega \cos(\omega t) - \alpha_1 \omega \sin(\omega t)$$

$$x_p'' = -\alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) - \alpha_1 \omega^2 \cos(\omega t)$$

$$x_p'' + \frac{b}{m} \dot{x}_p + \frac{k}{m} x =$$

$$\begin{aligned} & -\alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t) - \alpha_1 \omega^2 \cos(\omega t) \\ & + \frac{b}{m} (\alpha_0 \omega \cos(\omega t) - \alpha_1 \omega \sin(\omega t)) \\ & + \frac{k}{m} (\alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)) = A \sin(\omega t) \end{aligned}$$

on isole les termes devant $\sin(\omega t)$ et $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} \text{devant } \underline{\sin(\omega t)} : & \quad \begin{cases} -\alpha_0 \omega^2 - \frac{b}{m} \alpha_1 \omega + \frac{k}{m} \alpha_0 = A \\ -\alpha_1 \omega^2 + \frac{b}{m} \alpha_0 \omega + \frac{k}{m} \alpha_1 = 0 \end{cases} \\ \text{devant } \underline{\cos(\omega t)} : & \end{aligned}$$

(6)

On regroupe les termes avec α_0 et ceux avec α_1 :

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) - \alpha_1 \left(\frac{b}{m} \omega \right) = A \\ \alpha_0 \left(\frac{b}{m} \omega \right) + \alpha_1 \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) = 0 \end{cases}$$

à résoudre pour α_0 et α_1

Écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{b}{m} \omega \\ \frac{b}{m} \omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{b}{m} \omega \\ +\frac{b}{m} \omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \begin{bmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & \frac{b}{m} \omega \\ -\frac{b}{m} \omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) A}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \quad \alpha_1 = \frac{-\frac{b}{m} A \omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2}$$

Solution complète: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Ce sont $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ qui déterminent les constantes C_1 et C_2

car @: $\frac{b^2}{m^2} < \frac{4k}{m}$

$$x(t) = e^{-b/2m \cdot t} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \cdot t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \cdot t \right) \right) + \underbrace{\frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) A}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \sin(\omega t)}_{x_h} - \underbrace{\frac{\frac{b}{m} A \omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \cos(\omega t)}_{x_p} \quad (*)$$

3. battements Ceci a lieu lorsque :

i) l'amortissement est faible voir nul
 $b \approx 0$

ii) $\omega + \omega_0$ grand, tout en ayant
 $\omega - \omega_0$ petit

Autrement dit, ω proche de ω_0 et $b \approx 0$.

Lorsque $b = 0$, la solution de l'oscillateur forcé est

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2} A \sin(\omega t) \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)$$

$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

En résolvant C_1 et C_2 pour les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0} \left(\dot{x}_0 - \frac{A\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \sin(\omega_0 t) + x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

autrement dit, $x(t) = \tilde{B} (\tilde{A} \sin(\omega t) + \sin(\omega_0 t)) + x_0 \cos(\omega_0 t)$

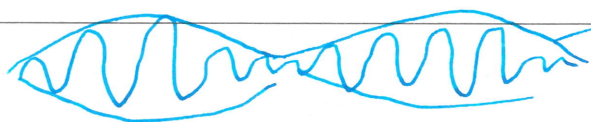
$$\tilde{B} = \frac{1}{\omega_0} \left(\dot{x}_0 - \frac{A\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad \tilde{B} \tilde{A} = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

En utilisant les identités trigonométriques et en prenant (la principale de sin.) $x_0 = 0$:

$$x(t) = \tilde{B} (1 - \tilde{A}) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t\right)$$

$$+ \tilde{B} (1 + \tilde{A}) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega}{2} \cdot t\right)$$

ainsi $\omega_0 + \omega$ peut être grand en ayant $\omega_0 - \omega$ petit



modulation d'une
grande fréquence par une
basse fréquence.

4. Résonance

Revenons à la solution particulière.

C'est la solution qui persiste lorsque le transitoire disparaît.

$$x_p(t) = \frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \sin(\omega t) - \frac{\frac{b}{m} A \omega}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2} \cos(\omega t)$$

Le facteur au dénominateur peut devenir petit en fonction de ω .
C'est le phénomène de la résonance.

$$x_p(t) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A_m = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$A_m = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 A^2}{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2\right)^2} + \frac{\frac{b^2}{m^2} A^2 \omega^2}{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2\right)^2}} = A \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2}}$$

$$= A \sqrt{\frac{1}{\omega^4 + \left(\frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{k^2}{m^2}}}$$

On va poser
 $\omega = \omega^2$

Le maximum $\hat{A}_m$ est atteint à la résonance. pour $\omega = \omega^2$

$$\frac{d}{d\omega} \left(\omega^2 + \left(\frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\right)\omega + \frac{k^2}{m^2} \right) = 0$$

$$2\omega + \frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m} = 0$$

$$\omega = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

ω_r : pulsation de résonance [rad/s]

