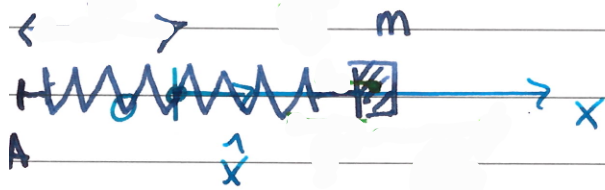


V Oscillateur harmonique II

①

1. Oscillateur a
2. Oscillateur a et f
3. Ba (
4. Re (, }

1. L'oscillateur harmonique



$$\|\vec{AO}\| = l_0$$

fixé en A. O au niveau de l_0 .

$$\ddot{x} = - \frac{k}{m} x \quad b)$$

$$\vec{AO} = \hat{x} = \vec{r}_{A \rightarrow P} + \vec{r}_P$$

modèle de la force de :

$$\vec{F} = -k \vec{x} = -k \hat{x}$$

$$\vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} =$$

$$\ddot{\vec{AP}} = \ddot{\vec{AO}} + \ddot{\vec{OP}} =$$

Solution de l'équation différentielle

C'est une équation homogène.

que l'on peut écrire sous la forme

$$\text{avec } \gamma \triangleq \omega_0 \triangleq$$

(2)

- c'est une équ. diff. linéaire à coeffs. constants et homogène.

⇒ idée: transformer
en une

On transforme l'équation diff.

Puis on calcule les solutions et
on pose $x =$

avec des
les effets

$$\frac{d}{dt} =$$

et donc si $x =$ etc.

de même si $x = \dot{x}$

Transformons l'équation en posant Δ

=

$$= \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} x$$

comme $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix} x = 0$ et $x \neq 0$
on doit avoir

= 0.

⇒ Résolution de l'équation algébrique.

3 cas sont à envisager

(a) < (b) = (c) >

(3)

Les solutions algébriques

$$\lambda_{1,2} = \left(\pm \frac{1}{2} \sqrt{\dots} \right) = \pm \sqrt{\dots}$$

(a) $\dots \in \mathbb{C}$

(c) $\dots \in \mathbb{R}$

(b) $\dots \in \mathbb{R}$

(a)

<

 $x(t) =$ e^i

+

 e^{-i}

=

 $\left(\dots \right)$

+

 $\left(\dots \right)$

(b)

 $x(t) =$

t

(c)

 $x(t) =$

t

Les conditions initiales

déterminent alors les

La solution particulière est

2. Oscillateur f a

Ecu. différentielle

$[\quad]$ de l'accélération imposée
A. $[\quad]$

Si l'ecu. est de la forme

$[\quad]$: valeur maximale de la
imposée



2.1 Résolution de l'équation différentielle

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

solution homogène :

solution particulière

()

La solution homogène a déjà été obtenue,

La solution particulière est choisie en

on pose $x_p(t) =$
avec

Représente le mouvement

A résoudre:

$$x_p(t) =$$

$$x_p' =$$

$$x_p'' =$$

derant :

derant :

}

On regroupe les termes avec et ceux avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right. =$$

Écriture matricielle

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} = \frac{1}{\dots} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 =$$

$$\alpha_1 =$$

Solution complète: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Ce sont et qui déterminent les

on a :

$$x(t) = \underline{\hspace{10cm}}$$

x_p {

x_h

} *

3. battements Ceci a lieu lorsque :

i) l'amortissement est ≈ 0 voir

ii) γ grand, tout en ayant γ petit

Autrement dit, γ proche de 0 et $\gamma \approx 0$.

Lorsque $\gamma \approx 0$, la solution de l'oscillateur forcé est

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{h}{m}} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{h}{m}} \cdot t\right) + \dots$$

$$+ A \sin(\omega t)$$

$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{h}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{h}{m}} t\right) + A \sin(\omega t)$$

En résolvant C_1 et C_2 pour les conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$

$$x(t) = \dots \sin(\omega_0 t) + \dots \cos(\omega_0 t) + A \sin(\omega t)$$

autrement dit, $x(t) = \tilde{B} (\tilde{A} \sin(\omega t) + \sin(\omega_0 t)) + x_0 \cos(\omega_0 t)$

$$\tilde{B} =$$

En utilisant les identités trigonométriques et en prenant (au pôle de réson.) $x_0 = 0$:

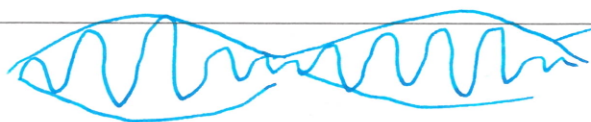
$$x(t) = \tilde{B} (1 - \tilde{A}) \sin\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)$$

$$+ \tilde{B} (1 + \tilde{A}) \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)$$

ainsi

peut être grand en ayant

petit



modulation d'une grande fréquence par une basse fréquence.

4. Résonance

Revenons à la solution particulière.

C'est la solution qui persiste lorsque le transitoire disparaît.

$$x_p(t) = \sin(\omega t) - \cos(\omega t)$$

Le facteur au dénominateur peut devenir petit en fonction de ω .
C'est le phénomène de la résonance.

$$x_p(t) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t) = A_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$A_m = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$A_m = \sqrt{\frac{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 A^2 + \frac{b^2}{m^2} A^2 \omega^2}{\left(\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2\right)^2}} = A \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega^2}}$$

$$= A \sqrt{\omega^4 + \left(\frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{k^2}{m^2}}$$

Le maximum $\hat{A}_m$ est atteint à la résonance. pour $\nu = \omega^2$

$$\frac{d}{d\nu} \left(\nu^2 + \left(\frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\right)\nu + \frac{k^2}{m^2} \right) = 0$$

$$2\nu + \frac{b^2}{m^2} - 2\frac{k}{m} = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

$$\nu = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}$$

