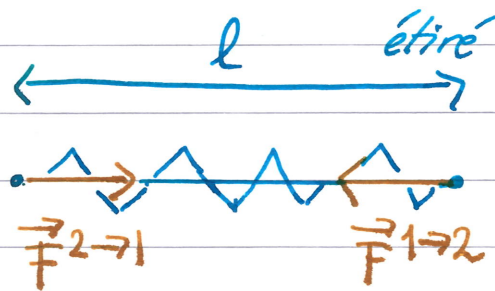
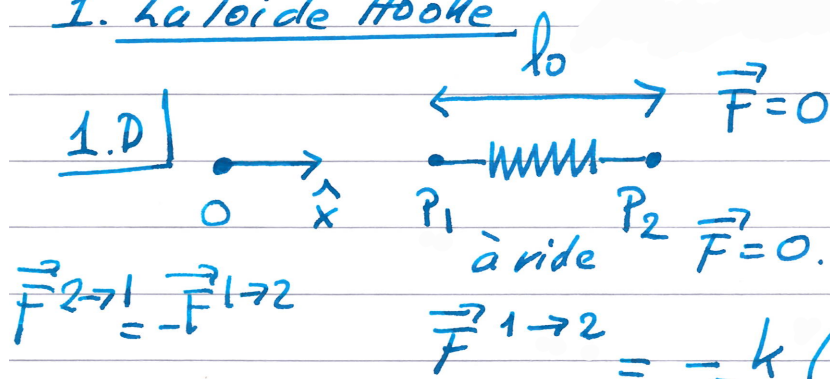


III oscillateur harmonique I

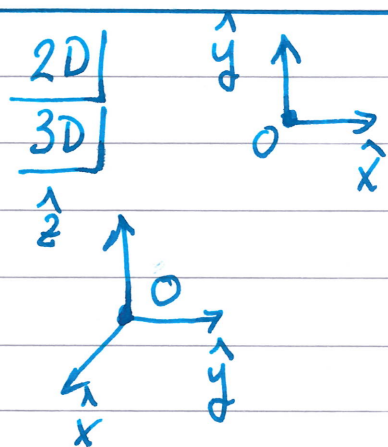
1. La loi de Hooke
2. Les équations dynamiques
3. Intégration des équations diff.
(constante d'intégration & cond. init.)

4. le pendule simple
 - 4.1 approximation des petits angles
 - 4.2 lien avec le L_0 le moment cinétique.

1. la loi de Hooke



$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(l - l_0) \frac{\vec{P_1 P_2}}{\|\vec{P_1 P_2}\|} = -k(\vec{P_1 P_2} - l_0 \hat{P_1 P_2})$$



$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(\vec{P_1 P_2} - l_0 \hat{P_1 P_2})$$

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = \vec{F}_2 = -k \vec{P_1 P_2} \left(1 - \frac{l_0}{\|\vec{P_1 P_2}\|}\right)$$

2. Equation différentielle du mouvement

(1 point matériel
rejoint avec une
extrémité fixe).

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

1D

$$m \ddot{x} = -k(l - l_0) \hat{x}$$

$P_1 = O \quad P_2 = P$

$$\vec{F}^{O \rightarrow P} = -k(\vec{OP} - l_0 \hat{OP}) = -k(x \hat{x} - l_0 \hat{x}) = -k(x - l_0) \hat{x}$$

$l = x$
 $l_0 = l_0$

1D ainsi

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0)$$

changement de variables

$$e \triangleq x - l_0$$

$$\dot{e} = \dot{x}$$

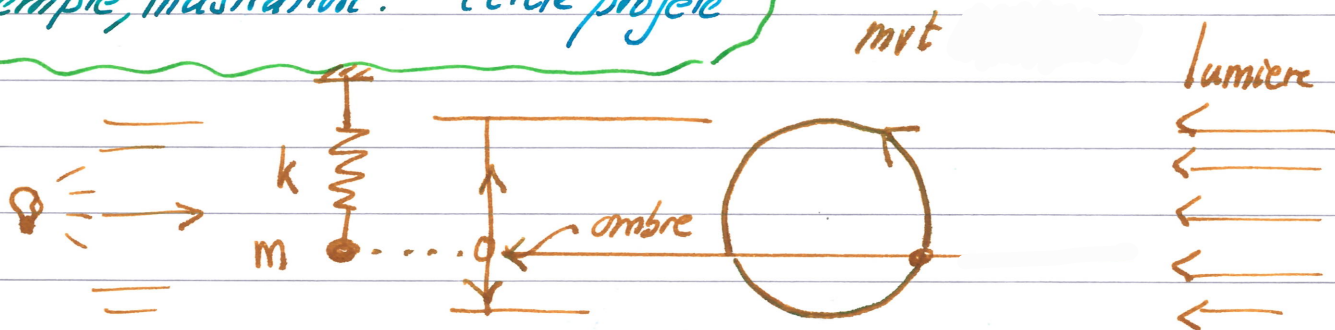
$$\ddot{e} = \ddot{x}$$

$$m\ddot{e} = -ke$$

$$\ddot{e} = -\frac{k}{m}e$$

3. Solution de l'équation différentielle

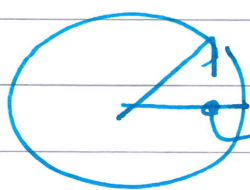
Exemple, illustration: cercle projeté



les deux mouvements sont parfaitement synchrones:

- le mvt de l'objet en rotation
l'ombre de

- le mvt de la masse attaché au ressort. (masse)



$$\theta = \omega t$$

projection

La position du ressort correspond à la projection d'un mouvement circulaire à vitesse angulaire $\omega = \omega_0$.

$$C \cos(\omega t)$$

constante d'intégration (rayon du cercle)

pendant la phase peut être arbitraire φ , $\cos(\omega t + \varphi)$.

La solution admet deux constantes d'intégration

Soit on peut écrire $e(t) = C_1 \cos(\omega t + C_2)$
ou après identités trig

Soit $e(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$

$C_1, C_2, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ sont des constantes d'intégration.

Solution de l'équation différentielle (suite)

Il reste à déterminer ω et la relation avec les conditions initiales (constantes d'intégration $\Leftrightarrow$ cond. init)

ω on dérive la solution provisoire

$$e(t) = C_1 \cos(\omega t + \varphi_2)$$
$$\dot{e}(t) = -C_1 \omega \sin(\omega t + \varphi_2)$$
$$\ddot{e} = -C_1 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 e(t)$$

de manière analogue avec

$$e(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$$
$$\dot{e}(t) = -\tilde{C}_1 \omega \sin(\omega t) + \tilde{C}_2 \omega \cos(\omega t)$$
$$\dot{e}'(t) = -\tilde{C}_1 \omega^2 \cos(\omega t) - \tilde{C}_2 \omega^2 \sin(\omega t)$$
$$= -\omega^2 (\tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t))$$
$$= -\omega^2 e(t)$$

en comparant avec l'équation initiale (avec $\ddot{e} = -\frac{k}{m}e$)

$$e = -\frac{k}{m}e$$

$$\ddot{e} = -\omega^2 e$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω : pulsation $[\text{rad/s}]$ f : fréquence $[\text{Hz}]$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$k: \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right] \quad F: [\text{N}] \text{ (Newton)}$$

$$T: \text{période } [s] \quad T = \frac{1}{f}$$

$$m: \text{masse } [\text{kg}]$$

k : constante de rigidité du ressort

lien avec les conditions initiales

$$e(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$$

$$e(0) = \tilde{C}_1$$

$$\dot{e}(t) = -\omega \tilde{C}_1 \sin(\omega t) + \omega \tilde{C}_2 \cos(\omega t)$$

$$\dot{e}(0) = \tilde{C}_2 \omega$$

$$\tilde{C}_1 = e_0$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{\dot{e}(0)}{\omega}$$

$$e(t) = e_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{e}(0)}{\omega} \sin(\omega t)$$

L'autre paramétrisation $e(t) = C_1 \cos(\omega t + \phi_2)$

$$e_0 = e(0) = C_1 \cos(\phi_2)$$

$$\dot{e}(t) = -\omega C_1 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$\dot{e}(0) = -\omega C_1 \sin(\phi_2)$$

$$e_0 = C_1 \cos(\phi_2)$$

$$\dot{e}_0 = -\omega C_1 \sin(\phi_2)$$

$$\tan \phi_2 = \frac{-\dot{e}_0}{e_0 \cdot \omega}$$

$$\phi_2 = \arctan\left(-\frac{\dot{e}_0}{\omega}, e_0\right)$$

4 quadrants

si $\sin \phi_2 \neq 0$

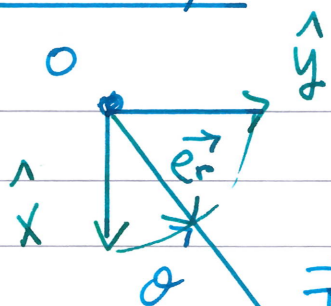
$$C_1 = \frac{\dot{e}_0}{-\omega} \cdot \frac{1}{\sin(\arctan(\frac{\dot{e}_0}{\omega}, e_0))}$$

si $\cos \phi_2 \neq 0$

$$C_1 = \frac{e_0}{\cos(\arctan(\frac{\dot{e}_0}{\omega}, e_0))}$$

$$e(t) = \frac{e_0}{\cos(\arctan(\frac{\dot{e}_0}{\omega}, e_0))} \cos(\omega t + \arctan(\frac{\dot{e}_0}{\omega}, e_0))$$

4. pendule simple



$$\Delta \quad \dot{\vec{e}}_r \neq 0 \quad \dot{\vec{e}}_\theta \neq 0 \quad \|\vec{e}_r\| = 1$$

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r = x \hat{x} + y \hat{y} \\ = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y}$$

$\vec{T}$ force de contrainte de liaison

$$\vec{T} \triangleq T \cos \theta \hat{x} + T \sin \theta \hat{y} \quad (T < 0 \text{ dans le dessin}) \quad x^2 + y^2 = R^2 = r^2$$

Equations de Newton

$$m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{OP}} \quad \text{avec les coordonnées } r \text{ et } \theta \text{ et le repère } (\hat{x}, \hat{y})$$

$$\vec{OP} = r \cos \theta \hat{x} + r \sin \theta \hat{y} \\ = r \vec{e}_r \quad \vec{e}_r = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r \quad \dot{\vec{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \hat{x} + \dot{\theta} \cos \theta \hat{y}$$

$$\dot{\vec{OP}} = -r \sin \theta \dot{\theta} \hat{x} + r \cos \theta \dot{\theta} \hat{y}$$

$$\ddot{\vec{OP}} = -r \cos \theta \dot{\theta}^2 \hat{x} - r \sin \theta \ddot{\theta} \hat{x} - r \sin \theta \dot{\theta}^2 \hat{y} + r \cos \theta \ddot{\theta} \hat{y}$$

$$= \begin{pmatrix} -r \cos \theta \dot{\theta}^2 - r \sin \theta \ddot{\theta} \\ -r \sin \theta \dot{\theta}^2 + r \cos \theta \ddot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} + m \vec{g} = m \vec{a} \quad \frac{\vec{T}}{m} + \vec{g} = \vec{a} = \ddot{\vec{OP}} = \begin{pmatrix} \frac{T}{m} \cos \theta + g \\ \frac{T}{m} \sin \theta \end{pmatrix}$$

2 équations:

$$(1) \quad \begin{cases} -r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta - g = T/m \cos \theta \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta = T/m \sin \theta \end{cases}$$

à résoudre pour $\ddot{\theta}$ et T

élimination de T:

$$\textcircled{1} \sin \theta - \textcircled{2} \cos \theta$$

$$-r\ddot{\theta} \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta$$

$$-r\ddot{\theta} \cos^2 \theta + r\dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$-r\ddot{\theta} \underbrace{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}_1 - g \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta}$$

élimination de $\ddot{\theta}$:

$$\textcircled{1} \cos \theta + \textcircled{2} \sin \theta$$

$$\frac{T}{m} = -r\dot{\theta}^2 - g \cos \theta$$

$$\boxed{T = -mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta}$$

4.1 Approximation des petits angles

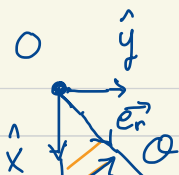
$$\boxed{\begin{array}{l} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{array} \quad \text{pour } \theta \text{ petit}}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot t\right) + \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{g/r}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot t\right)$$

$$T = -mr\dot{\theta}^2 - mg$$

$$T = -mr \left[-\theta_0 \sqrt{\frac{g}{r}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot t\right) + \dot{\theta}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot t\right) \right]^2 - mg$$



$$\hat{z} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

$$\|\vec{M}_o\| = r m g \sin \theta$$

$$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge m \vec{g}$$

$$= -r m g \sin \theta \hat{z}$$

$$\vec{L}_o = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_p$$

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{L}_o = m (r \vec{e}_r \wedge (r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)) = m r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o$$

$$m r^2 \ddot{\theta} \hat{z} = -r m g \sin \theta \hat{z}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin \theta$$

Remarque: $\frac{1}{T}$ n'est pas possible de déterminer $\vec{T}$ avec les moments !