

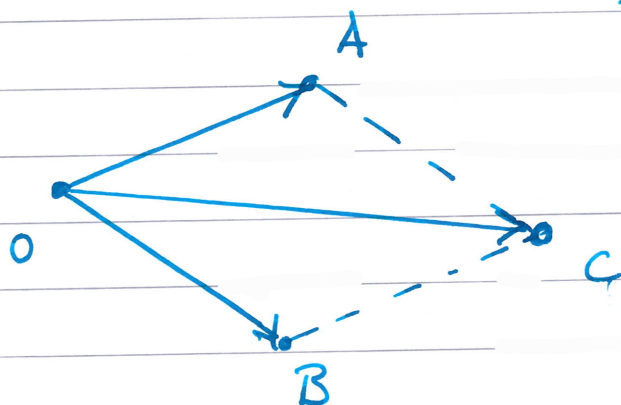
I. Vecteurs - Cinématique

1. addition / soustraction
2. produit scalaire
3. déterminant
4. produit vectoriel
5. produit mixte

6. produit triple
7. repère (référentiel)
8. trajectoire
9. dérivée(s)
10. règle de Leibniz

I.1 addition

Δ différence entre les points A, B et les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$

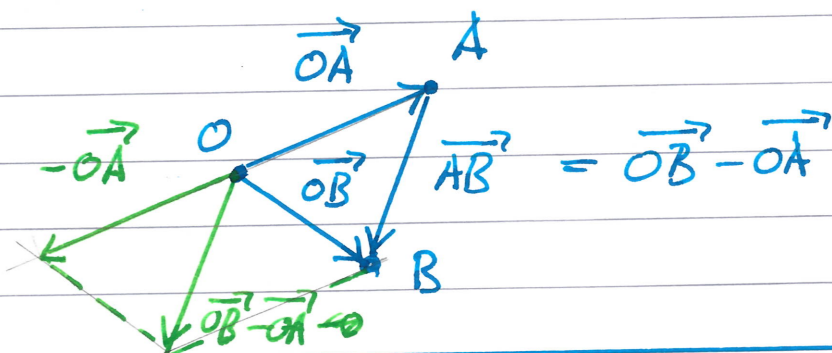


$$\vec{OC} \triangleq \vec{OA} + \vec{OB}$$

Règle du parallélogramme

soustraction $\equiv$ addition de l'opposé

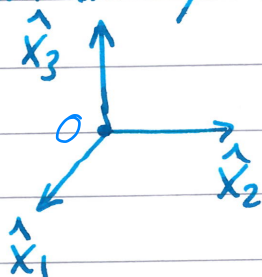
$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + (-\vec{OA}) = \vec{AB}$$



en composantes :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

il faut un repère (cf. plus loin)



$$\vec{OA} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3$$

$$\vec{OB} = b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3 + b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3$$

$$= (a_1 + b_1) \hat{x}_1 + (a_2 + b_2) \hat{x}_2 + (a_3 + b_3) \hat{x}_3$$

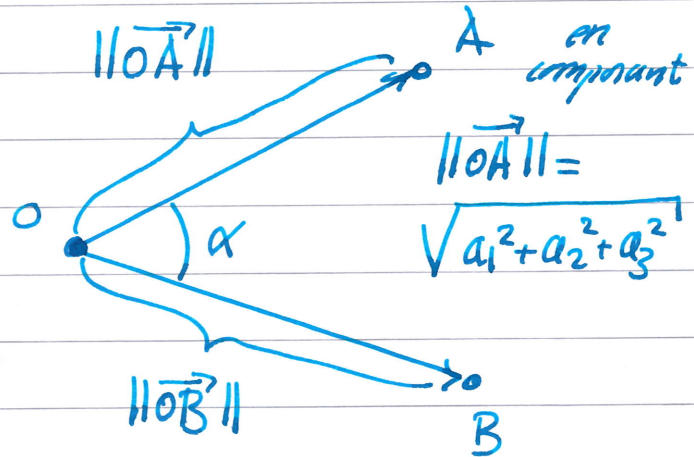
car on peut mettre bout à bout les $a_i \hat{x}_i$ avec les $b_i \hat{x}_i$
et les $\hat{x}_i \perp \hat{x}_j \quad i \neq j$.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

I.2 Produit scalaire

définition "géométrique"

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} \triangleq \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \alpha$$



nécessite la notion de norme $\|\vec{OA}\|$
= "longueur" de la "flèche".

définition "algébrique"

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

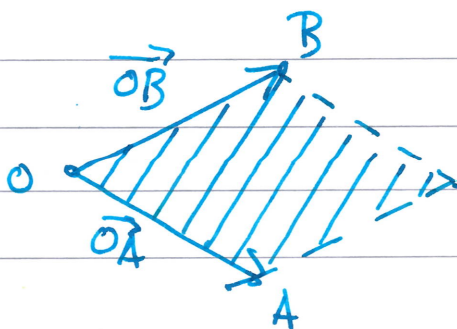
que l'on écrit souvent par un produit
matriciel

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

I.3 déterminant

notion géométrique en 2D : surface
en 3D : volume

2D



$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

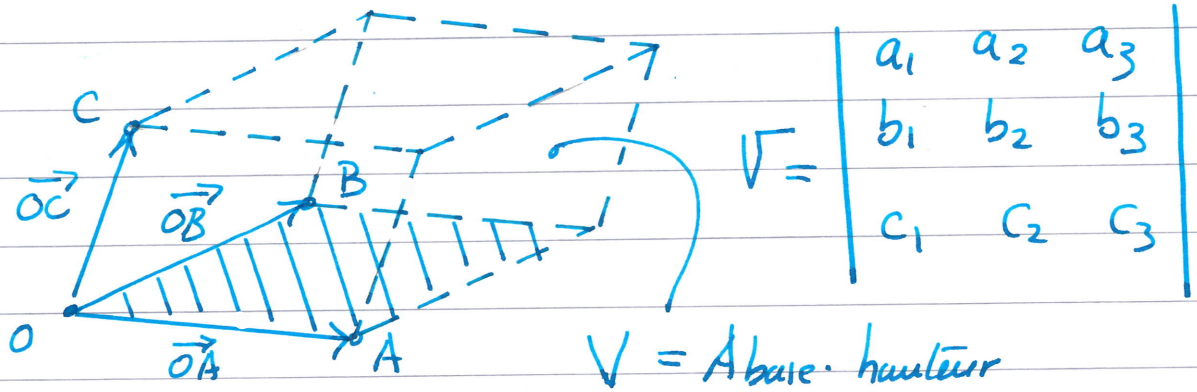
$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \triangleq a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3D

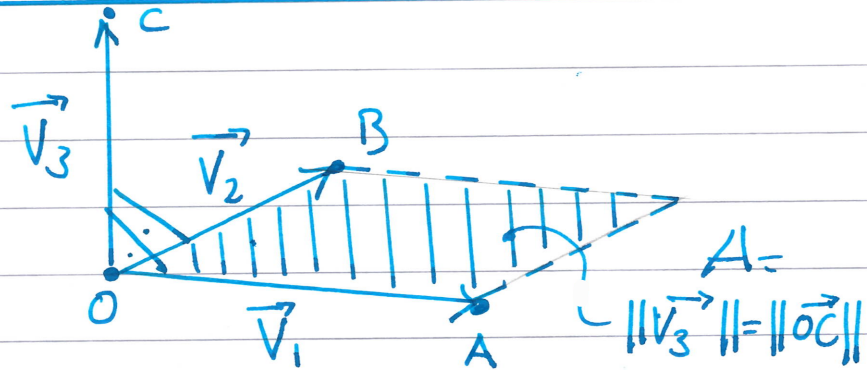
déterminant $\equiv$ "volume"



I.4 produit vectoriel

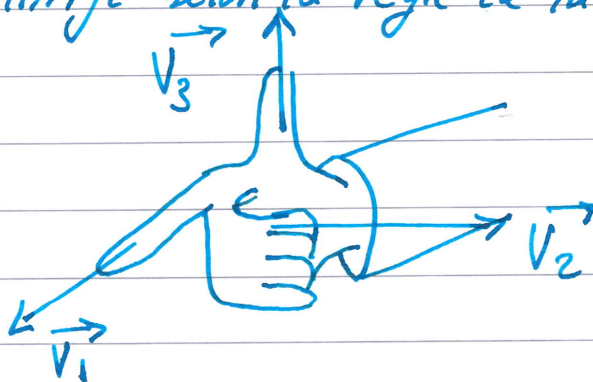
$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$$



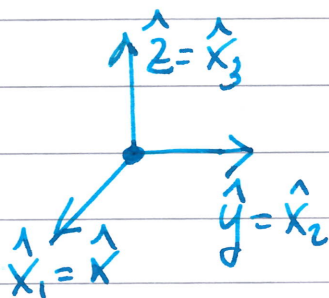
$\|\vec{V}_3\| = \text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2$

$= \vec{OC}$ est dirigé selon la règle de la main droite



$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$$

Calcul algébrique



repère
orthonormé
direct

$$\vec{V}_1 = x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y} + z_1 \hat{z}$$

$$\vec{V}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y} + z_2 \hat{z}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & x_1 & x_2 \\ \hat{y} & y_1 & y_2 \\ \hat{z} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

I.5 produit mixte

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (*)$$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = V = A \cdot h$
 $A = \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| \quad A \cdot h = \|\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})\| = |V|$

en effet, $\vec{b} \wedge \vec{c} = \hat{x}_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \hat{x}_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \hat{x}_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

$\vec{a} = a_1 \hat{x}_1 + a_2 \hat{x}_2 + a_3 \hat{x}_3$
 et $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

I.6 produit triple

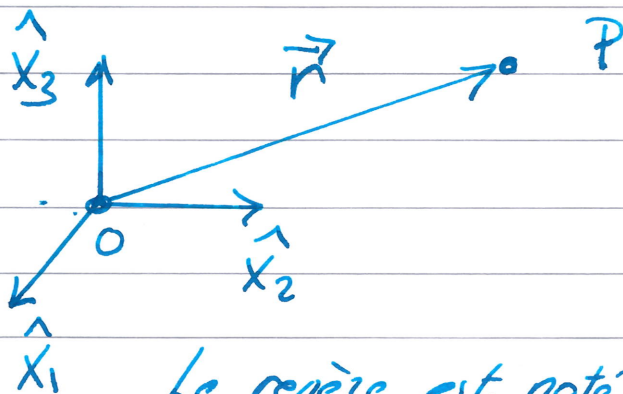
théorème:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

démonstration: diapositives

Cinématique

I.7 Repère et point matériel

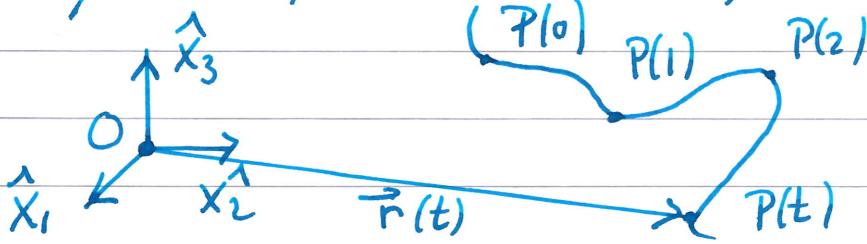


$\vec{r}$ rayon vecteur
 $\vec{r} \triangleq \vec{OP}$

Le repère est noté $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ orthonormé
 les $\hat{x}_i$ sont tel que $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = 0 \quad i \neq j \quad \|\hat{x}_i\| = \sqrt{\hat{x}_i \cdot \hat{x}_i} = 1$

I.8 trajectoire

La nouveauté par rapport à la géométrie est que le point P se déplace



Déf. la trajectoire: Lieu des points $P(t)$ lorsque t varie, i.e. courbe déparabée de sa dépendance p.r. au temps t .
 $\{P(t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$

Déf. Equation horaire: Relation (fonction) entre la position (donnée par le rayon vecteur $\vec{r}(t)$) et le temps t .
 $t \mapsto \vec{r}(t)$. Le temps t apparaît explicitement.

Vitesse moyenne pour se déplacer de A à B .

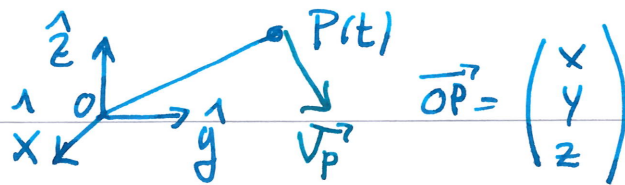
$$\vec{V} = \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{t_B - t_A} = \frac{\vec{AB}}{t_B - t_A}$$
$$\vec{V} = \frac{\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\vec{OP}(t_B) - \vec{OP}(t_A)}{t_B - t_A}$$

Vitesse instantanée $\cong$ vitesse moyenne entre deux instants infiniment courts, i.e. lorsque t_B est très proche de t_A

$$\vec{V}_P(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{OP}(t+h) - \vec{OP}(t)}{h} \quad h = t_B - t_A$$

I.9 dérivée

Vitesse inst.



notation

$$\frac{d}{dt} \vec{OP} = \dot{\vec{OP}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{OP}(t+h) - \vec{OP}(t)}{h} = \vec{V}_P$$

$$\vec{V}_P = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z}$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Accélération instantanée

$$\ddot{\vec{OP}} = \frac{d}{dt} \vec{V}_P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{V}_P(t+h) - \vec{V}_P(t)}{h}$$

$$\ddot{\vec{OP}} = \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Règle de la dérivée de fonctions composées

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

En d'autres termes, $(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$

$$\frac{d}{dt} \sin(x(t)) = \cos(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \quad \begin{matrix} \sin = f \\ x = g \end{matrix} \quad \begin{matrix} f' = \cos \\ g' = \dot{x} \end{matrix}$$

I.10 Règle de Leibniz

Thm | $\frac{d}{dt} (a(t) \cdot b(t)) = \dot{a}(t) b(t) + a(t) \cdot \dot{b}(t)$

notation plus compact

$$\dot{ab} = \dot{a}b + a\dot{b}$$

$$\frac{d}{dt} (ab) = \left(\frac{d}{dt} a \right) b + a \left(\frac{d}{dt} b \right)$$

La règle de Leibniz s'applique également aux produit scalaire produit vectoriel

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{a} \right) \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \left(\frac{d}{dt} \vec{b} \right) \quad \left| \quad \frac{d}{dt} (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \left(\frac{d}{dt} \vec{a} \right) \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \left(\frac{d}{dt} \vec{b} \right) \right.$$

$$\vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} \quad \left| \quad \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}} = \dot{\vec{a}} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}} \right.$$

Complément: calcul des déterminants: par développement récursif

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \leftarrow \text{signature}$$

$$-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Règle de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{a_1 b_2 c_3} + \underline{a_3 b_1 c_2} + \underline{a_2 b_3 c_1} - \underline{a_3 b_2 c_1} - \underline{a_2 b_1 c_3} - \underline{a_1 b_3 c_2}$$

+ permutations circulaires des indices 1,2,3 : $(1,2,3)$ $(3,1,2)$ $(2,3,1)$
 - permutations circulaires des indices 3,2,1 : $(3,2,1)$ $(2,1,3)$ $(1,3,2)$