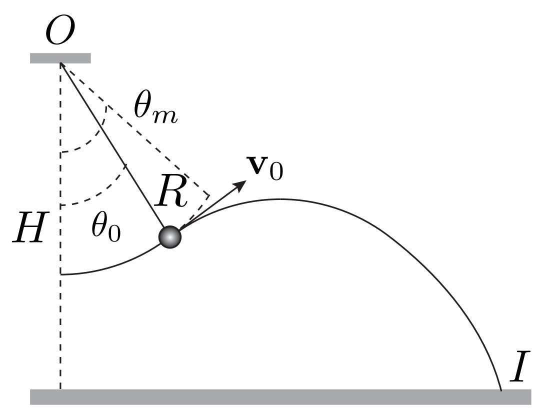
14 octobre 2024

Série 4 : Energie

1. Balançoire

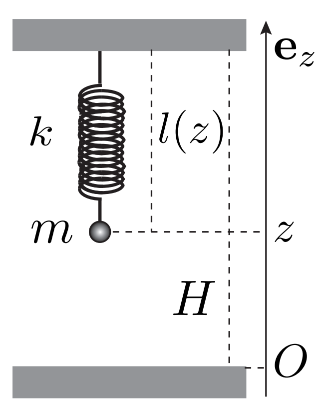
Un enfant se jette d'une balançoire en mouvement. Pour analyser la situation, on modélise l'enfant sur sa balançoire par un pendule simple, i.e. un point matériel représentant l'enfant au bout d'un fil. Un dispositif sans masse libère le point matériel sans interférer autrement sur le mouvement du pendule.



a) La balançoire atteint une amplitude maximale correspondant à un angle θ_m. Pour un angle quelconque θ_0, déterminer la norme v_0 de la vitesse de l'enfant.

b) Déterminer l'énergie cinétique T_f de l'enfant lorsqu'il touche le sol.

2. Boule suspendue à un ressort



Une boule de masse m est suspendue verticalement à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, dont le point d'attache est fixé au plafond de hauteur H.

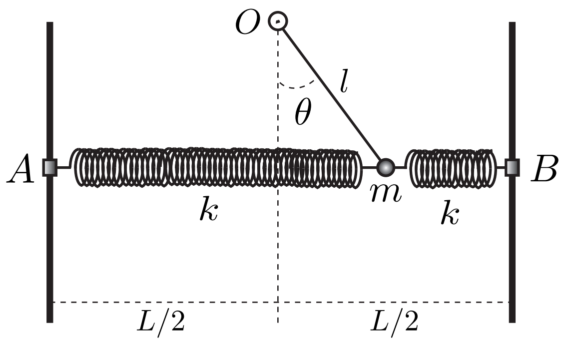
a) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale V (n.b. définir avec soin les références d'énergie potentielle).

b) Déterminer la position d'équilibre de la boule.

3. Système pendule et ressorts

Un pendule simple de masse m, de longueur $l < L/2$, est lié à deux ressorts maintenus horizontaux par des liaisons coulissantes parfaites en A et B. La constante de chaque ressort vaut k et leur longueur à vide $L/2$. Le pendule est libre de tourner entièrement, i.e. $\theta \in (0, 2\pi]$.

On pose : $\omega_g^2 = \frac{g}{l}$ et $\omega_k^2 = \frac{2k}{m}$. De plus, on considère que $\omega_g^2 \neq \omega_k^2$.



a) Déterminer les positions d'équilibre θ_0 et leur stabilité (considérer $\theta_0 \in [0; \pi]$ et discuter des autres cas par symétrie).

b) Déterminer la pulsation ω dans l'approximation des petits mouvements par rapport à la position d'équilibre stable $\theta_0 = 0$, i.e. $\theta \ll 1 \;\Rightarrow\; \sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$.

INDICATION : Lors de forces provenant uniquement de potentiels (système conservatif), l'équilibre est stable s'il correspond à un minimum local du potentiel.

4. Toboggan

Un enfant glisse sur un toboggan aquatique. On modélise l'enfant par un point matériel et le toboggan par un arc de cercle. Ainsi le point matériel glisse sans frottement du point A vers le points B selon un arc de cercle. Le point A est situé à 3 mètres de hauteur et le point B au sol et 5 mètres en avant du point A au niveau du sol.

1. Déterminer le rayon du cercle pour que la vitesse à l'arrivée soit purement horizontale. Vérifier vos calculs à l'aide d'une règle et d'un compas (prendre 1 cm $\equiv$ 0.5 m). Indication : utiliser l'équation du cercle centré en (x_R, y_R) qui est $(x - x_R)^2 + (y - y_R)^2 = R^2$, Utiliser également la dérivée de cette équation $(x - x_R)dx + (y - y_R)dy = 0$.
2. Approximer le cercle par segments de droite. Prendre 2 segments, puis 3 segments uniformément espacés selon l'axe horizontal. Déterminer les points pour qu'ils soient sur l'arc de cercle.
3. On demande d'écrire les lois de Newton pour un segment donné et de déterminer les équations horaires.
4. Calculer le temps d'arrivée lorsque l'approximation des segments de droite est utilisée. Traiter le cas de deux segments.
5. Vérifier la conservation de l'énergie. (Vérifier numériquement dans le cas de deux segments.)

6. Utiliser la conservation de l'énergie pour simplifier quelque peu le calcul du temps d'arrivée. Donner l'expression de la vitesse après le parcours d'un segment connaissant la vitesse au début du segment. Utiliser le résultat pour calculer le temps d'arrivée à la fin du premier segment lors de la subdivision du toboggan en deux segments. Indication : utiliser la conservation de l'énergie pour déterminer la vitesse en bas d'un segment connaissant celle en haut du segment. Ensuite utiliser la loi de Newton pour qui exprime le changement de vitesse en fonction de l'accélération et du temps. L'accélération est la projection de la gravité.

Remarque : Le changement de direction s'effectue sans perte d'énergie cinétique car la liaison est parfaite. FACULTATIF : Vous pouvez utiliser une calculatrice programmable ou un ordinateur pour augmenter le nombre de segments de droites au delà de 3, et ainsi regarder si le calcul du temps d'arrivée converge en fonction du nombre de segments.