

Idées sur les énergies

Rédigés par Tanguy Classen



Idées sur les énergies
25 octobre 2024
École polytechnique fédérale de Lausanne
par
Tanguy Classen
Lausanne, EPFL, 2024

En cours, on a vu une chose très importante ; dans le cadre de forces conservatives, on dit que :

L'énergie mécanique totale d'un système est conservée

$$E_{\text{meca}} = \underbrace{T}_{\text{cinétique}} + \underbrace{V}_{\text{potentielle}} = \text{cste} \quad (1)$$

Énergie cinétique ?

L'énergie cinétique est l'énergie que l'on obtient grâce à un mouvement ayant une vitesse $\vec{v}$. Ici, c'est l'énergie de "translation".

Elle se note sous la forme :

$$T = \frac{1}{2}m(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 \quad (2)$$

Trop bien ! Le $\vec{v} \bullet \vec{v}$ nous fait passer en scalaire (nombre), plus besoin de vecteurs !

C'est l'avantage de passer par les énergies !

Énergie potentielle ?

L'énergie potentielle représente la capacité d'un objet à obtenir de la vitesse ;

- L'objet a la capacité d'obtenir de la vitesse en tombant (grâce à la gravité)

Énergie potentielle de gravitation

$$V_g = mgz \quad (3)$$

- Un objet a la capacité d'être expulsé par un ressort et d'obtenir de la vitesse

Énergie potentielle élastique

$$V_{el} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (4)$$

En d'autres termes, le potentiel se note sous la forme :

$$V = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} \quad (5)$$

Trop bien ! Encore une fois, le $\vec{F} \bullet d\vec{r}$ nous fait passer en scalaire (nombre), plus besoin de vecteurs !

Mais par contre, il faut bien définir nos composantes...

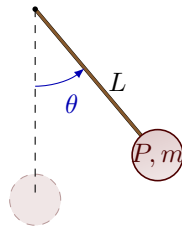
Avec cela, on peut raisonner plus facilement...

Comme l'énergie totale est conservée, il suffit de trouver un point où notre système n'a plus de vitesse, ou bien un point où le système a la meilleure capacité à obtenir de la vitesse à partir d'un potentiel uniquement.

On cherche à exprimer l'énergie mécanique totale en fonction de V_i à un certain point, ou T_i à un certain endroit...

Exemple

Prenons un exemple d'un simple pendule d'une masse m relié par un fil de longueur L à l'origine, variant selon un angle θ



On pose le bilan d'énergie :
 $E = T + V = \text{cste}$

1. Cinétique

On pose simplement la formule de l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2 \quad (6)$$

2. Potentiel

On doit trouver une expression de la hauteur par rapport à θ :

- Méthode intégrale :

$$V = - \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

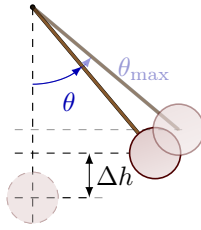
$$= - \int_{r_0}^{r_\theta} m\vec{g} \cdot d\vec{r} \quad (8)$$

$$= m [\vec{g} \cdot \vec{r}]_{r_0}^{r_\theta} \quad (9)$$

$$= m \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L \sin(\theta) - L \\ L \cos(\theta) - L \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\Rightarrow V_g = mgL(1 - \cos \theta) \quad (11)$$

- Méthode Δh



Comme on voit sur le dessin, on doit exprimer la variation de hauteur Δh selon θ pour donner l'expression de l'énergie potentielle.

- Celle-ci est maximale en $\theta = \theta_{\max}$
Plus grande capacité à obtenir de la vitesse en tombant
- Celle-ci est nulle lorsque $\theta = 0$
Aucune capacité à obtenir de la vitesse en tombant (sauf si on coupe le fil...)

Vectoriellement, on a donc :

$$h = L - OP\hat{y} \quad (12)$$

$$h = L - L \cos \theta \quad (13)$$

$$\Rightarrow V_g = mgh = mgL(1 - \cos \theta) \quad (14)$$

Comme on sait que l'énergie mécanique est conservée, et que l'orsque l'on est à l'apogée du mouvement du pendule (en $\theta_{\max}$) la vitesse est nulle (en $\theta_{\max}$) on a donc uniquement du potentiel (*en effet, on s'arrête pour retomber !*) On peut donc écrire:

$$E = \underbrace{T(\theta_{\max})}_{=0} + V_g(\theta_{\max}) = mgL(1 - \cos \theta_{\max})$$

Et ainsi, on a le bilan d'énergie totale :

$$E = \frac{1}{2} m ||\vec{v}||^2 + mgL(1 - \cos \theta) = mgL(1 - \cos \theta_{\max}) \quad (15)$$

Position d'équilibre

On se souvient qu'avec les forces, on avait défini la position d'équilibre comme :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \text{à l'équilibre} \quad (16)$$

Et juste avant, on a posé que le potentiel se notait de la façon suivante :

$$V = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Hmmm... peut-être qu'une idée pourrait être de se ramener à une force pour pouvoir calculer à quel moment celle-ci est nulle, afin de trouver l'équilibre ?

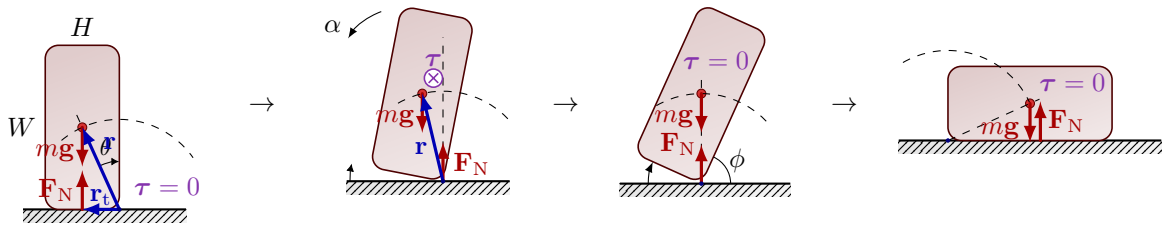
Pour trouver l'équilibre d'un système lié à un potentiel sur un seul degré de liberté, on cherchera à donner les maximums et minimums du potentiel grâce à la dérivée (*on fait partir l'intégrale d'au dessus !*):

à l'équilibre $\Leftrightarrow$ dérivée du potentiel nulle (selon son degré de liberté)

$$\left. \frac{dV(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = 0 \quad (17)$$

Si on prend l'exemple d'un corps rectangulaire de masse m que l'on essaie de faire pivoter d'un angle ϕ grâce à un moment τ .

Le degré de liberté du système est donc ϕ (*en effet la hauteur du centre de masse z dépend de ϕ*)



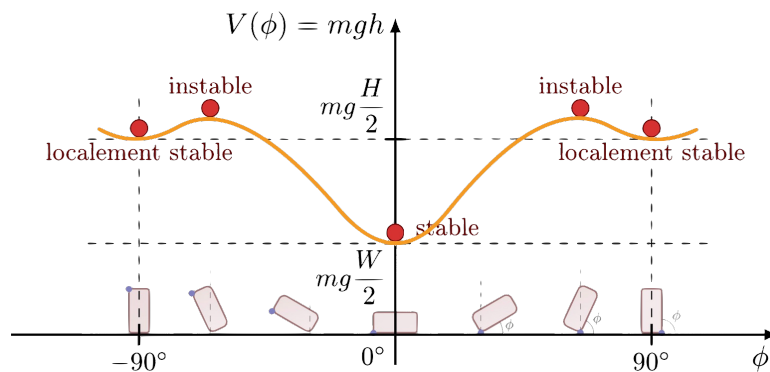
(18)

On voit qu'il y a plusieurs points où l'on pourrait trouver un équilibre (on peut lâcher le corps sans qu'il tombe), mais celui-ci sera très bref (instable)

Pour qualifier la stabilité de l'équilibre, on doit dériver une seconde fois pour calculer la nature des points d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} > 0 & : \text{état stable (minimum local du potentiel)} \\ \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} < 0 & : \text{état instable (maximum local du potentiel)} \\ \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} = 0 & : \text{état indéterminé (point d'inflexion)} \end{aligned} \quad (19)$$

On peut également visualiser le potentiel en fonction de l'angle ϕ du corps, mais attention cela ne fonctionne qu'avec un degré de liberté, ici l'angle ϕ !



(20)