

Rappel - Résumé:

Les nombres complexes

①

on pose $i \triangleq \sqrt{-1}$

(noté également j pour les électriciens, afin de ne pas confondre avec le courant)

ensuite on combine deux nombres réels a et b ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) pour définir un nombre dit complexe:

$$c \in \mathbb{C} \quad c \triangleq a + ib$$

On peut ensuite vérifier les propriétés

Algèbres ^{produit} $(a+ib)(c+id) = ac + (ad+bc)i + i^2 bd$

addition: $(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$ $= (ac - bd) + (ad+bc)i$
 $\text{car } i^2 = -1$

Propriétés: thm fondamental de l'algèbre tout polynôme à coefficients réels possède autant de racines complexes que son degré.

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$



$$(\lambda - c_1)(\dots)(\lambda - c_n) \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

il se factorise
d'où 1.

pour facteurs irréductibles de

Géométrie du produit de nombres complexes

(1)

1° les modules se multiplient comme des nombres réels

Def: module d'un nombre complexe

$$|c| = |a+ib| \triangleq \sqrt{a^2+b^2}$$

$$|(a+ib)| |c+id| = |(ac-bd) + (ad+bc)i|$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2}$$

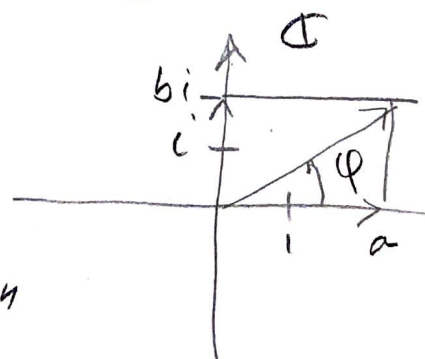
$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

oh


$$\varphi \triangleq \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$$



si on représente le nombre complexe dans un plan

les nombres complexes s'additionnent alors comme
des vecteurs.

prenons deux nombres complexes
de module unitaire :

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

il $\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \cos \end{matrix}}_a$
 $a+ib$

$\sin(\theta) = b$
 $\cos(\theta) = a$ (3)

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1) &= b & \sin(\theta_2) &= d \\ \cos(\theta_1) &= a & \cos(\theta_2) &= c \end{aligned}$$

à montrer que

il faut
montrer
ceci

$$\begin{cases} \sin(\theta_1 + \theta_2) = ad + bc \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) = ac - bd \end{cases}$$

On prend les rotations plane

$$R_{\theta_1} R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix}$$

multiplication
matricielle !

$\Rightarrow$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = ac - bd$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = bc + ad$$

C. Q. F. D

La multiplication revient à additionner les angles:

(4)

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{c}{d}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right)$$

cette formule est alors une conséquence de la précédente.

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1) &= b/a \\ \cos(\theta_1) &= a/a \\ \sin(\theta_2) &= c/d \\ \cos(\theta_2) &= d/d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\theta_1 + \theta_2) &= ad+bc \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= ac-bd\end{aligned}$$

l'exponentielle

$e^{i\varphi}$ est tel que

$$ae^{i\varphi_1} \cdot be^{i\varphi_2} = ab e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

on obtient ainsi une correspondance compatible avec le produit.

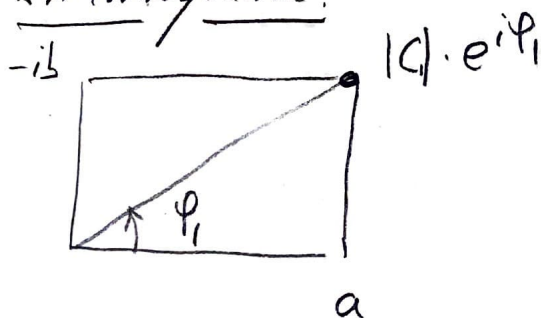
(un isomorphisme entre les opérations de multiplication des nombres complexes et la exponentielle)

$$|c_1| e^{i\varphi_1} \cdot |c_2| e^{i\varphi_2} = |c_1 c_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = |c_1| |c_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

En gros, on multiplie les modules, et on

additionne les angles comme pour les nombres complexes.

En conséquence:

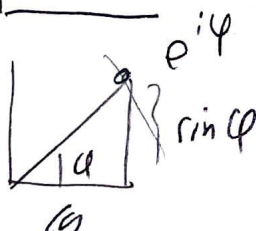


$$c_1 = a + ib$$

$$c_2 = c + id$$

prenons les modules de longueur unité:

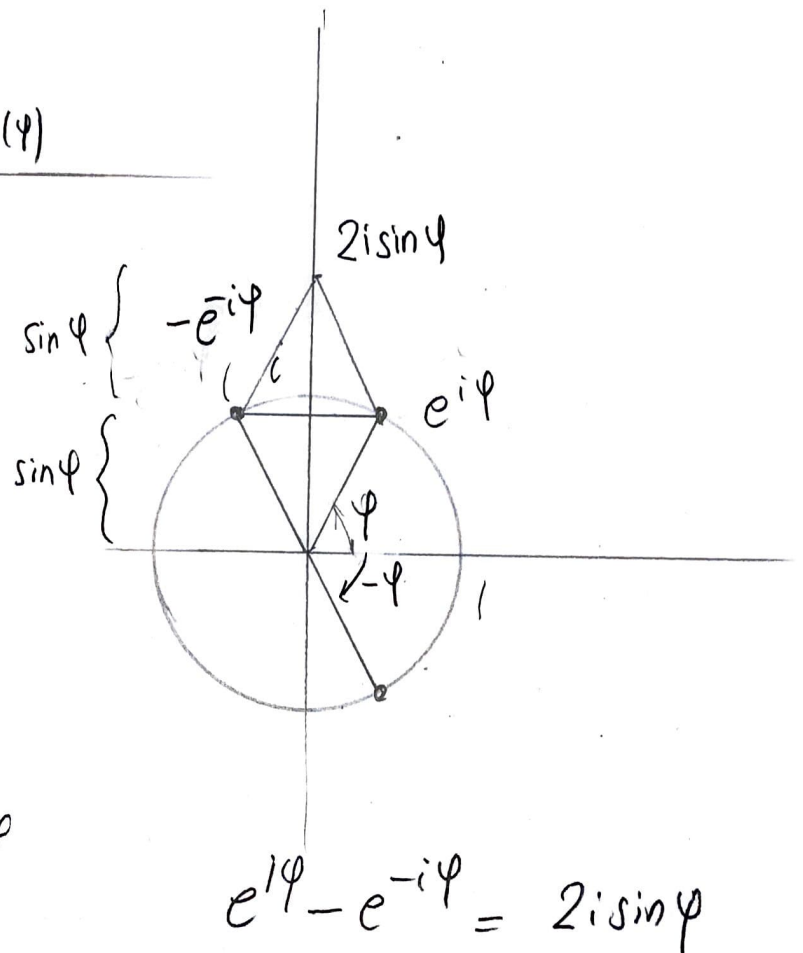
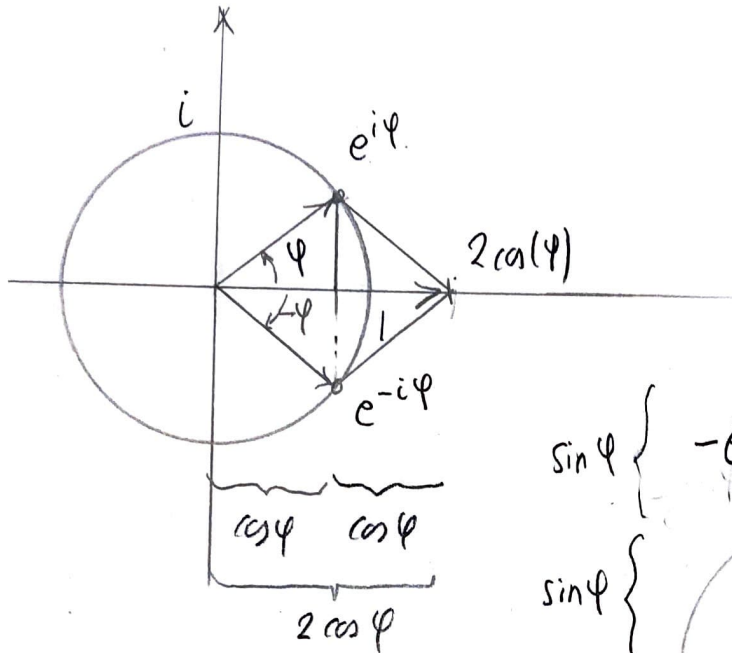
$$e^{i\varphi} \triangleq \cos \varphi + i \sin \varphi$$



Exprimer $\cos(\varphi)$ et $\sin(\varphi)$ en utilisant (3)

$$e^{i\varphi} \text{ et } e^{-i\varphi}$$

Construction géométrique



Comme on additionne
les vecteurs, on utilise la
règle du parallélogramme
on construit la diagonale du
parallélogramme de côtés $e^{i\varphi}$
et $e^{-i\varphi}$. On trouve
 $2\cos\varphi$.

ainsi

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$