

III. oscillateur harmonique I

le ressort, l'oscillateur à ressort, le pendule simple, le mouvement harmonique

Ph. Müllhaupt

1. loi de Hooke
2. équations différentielles du mouvement
3. intégration des équations différentielles

4. le pendule simple

première méthode: repère fixe

deuxième méthode: repère mobile

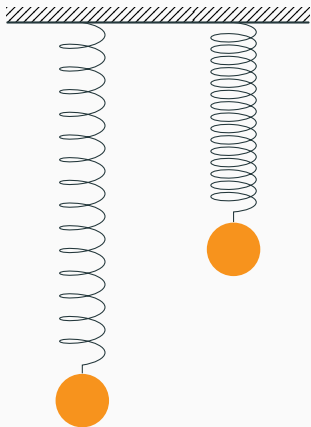
3 ème méthode: les moments

approximation des petits angles

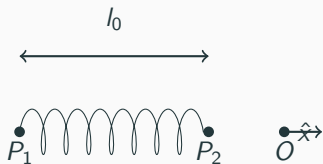
autre méthode pour obtenir la solution de l'oscillateur harmonique

loi de Hooke

loi de Hooke



loi de Hooke



$$\vec{F}^{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}^{1 \rightarrow 2}$$

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(l - l_0)\hat{x}$$

$$\vec{F}^{1 \rightarrow 2} = -k(l - l_0)\frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|} = -k\left(\overrightarrow{P_1 P_2} - l_0\widehat{P_1 P_2}\right)$$

formule de la force du ressort

On note

$$\vec{F}^{A \rightarrow B}$$

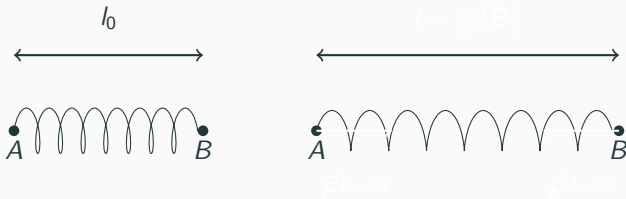
la force dont "la cause" se trouve au point A
la force est liée au point B et agit ainsi au point B .

pour le ressort

$$\vec{F}^{A \rightarrow B} = k(AB - l_0)$$

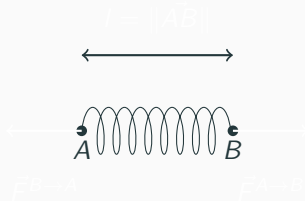
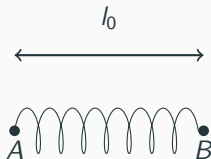
une force apparaît toujours aux deux extrémités du ressort et on a

$$\vec{F}^{A \rightarrow B} = -\vec{F}^{B \rightarrow A}$$



La même formule est valable en compression également

$$\vec{F}^{A \rightarrow B} = -k(\vec{AB} - l_0 \vec{AB})$$



Remarque: $\vec{F}^{B \rightarrow A}$ obéit à la troisième loi de Newton (action-réaction) car la formule donne

$$\vec{F}^{B \rightarrow A} = -k(\vec{BA} - l_0 \vec{BA}) = -\vec{F}^{A \rightarrow B}$$

équations différentielles du mouvement

équation différentielles du mouvement

En 1D:



$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{F}^{O \rightarrow P} &= m\ddot{\vec{OP}} \\ -k(\vec{OP} - l_0\vec{OP}) &= m\ddot{\vec{OP}} \\ -k(x\hat{x} - l_0\hat{x}) &= m\ddot{x}\hat{x}\end{aligned}$$

les $\hat{x}$ se simplifient et en divisant par m :

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

changement de variable

$$e \equiv x - l_0$$

$$\dot{e} = \dot{x} \quad \text{car } l_0 \text{ est constant}$$

$$\ddot{e} = \ddot{x}$$

$$= -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

$$= -\frac{k}{m}e$$

$$\ddot{e} = -\frac{k}{m}e$$

on a obtenu une équation homogène, qui comprend que la variable e et ses dérivées $\dot{e}$, $\ddot{e}$ dans chaque terme (il n'y a plus le terme $+\frac{k}{m}l_0$).

Définition de l'oscillateur harmonique

Tout système équivalent à un point matériel astreint à se déplacer en ligne droite et soumis à une force de rappel proportionnelle à la distance à un point fixe sur cette droite.

intégration des équations différentielles

solution de l'équation différentielle

$$e(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

démonstration

$$\dot{e}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \sqrt{\frac{k}{m}} C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

$$\ddot{e}(t) = -C_1 \frac{k}{m} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - C_2 \frac{k}{m} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

$$\ddot{e}(t) = -\frac{k}{m} \left(C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right)$$

$$\ddot{e}(t) = -\frac{k}{m} e(t)$$

les conditions initiales

$$e(0) = C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0 \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0 \right) = C_1$$

$$\dot{e}(0) = -C_1 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0 \right) + C_2 \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} 0 \right) = C_2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

solution complète

$$e(t) = x - l_0 = e(0) \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{e}(0) \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [\text{rad/s}]$$

la fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [1/\text{s}] = [\text{Hz}]$$

la période

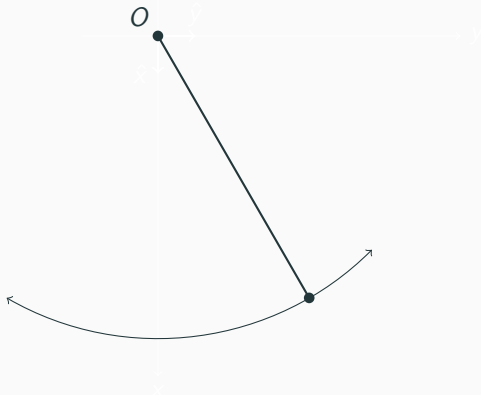
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad [\text{s}]$$

le pendule simple

1 ère méthode de modélisation repère fixe

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)
repère fixe et centré en O



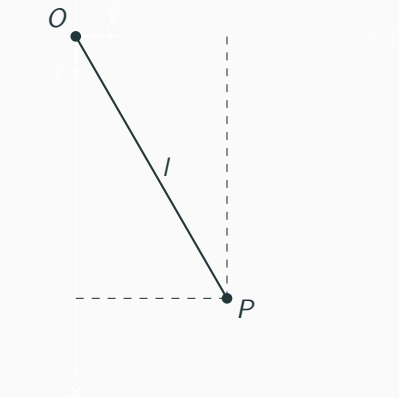
l'axe x est dirigé vers le bas et O est fixé sur le centre de rotation

2. coordonnées et liaison

coordonnées: x et y

$$\vec{OP} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

liaison: $x^2 + y^2 = R^2$

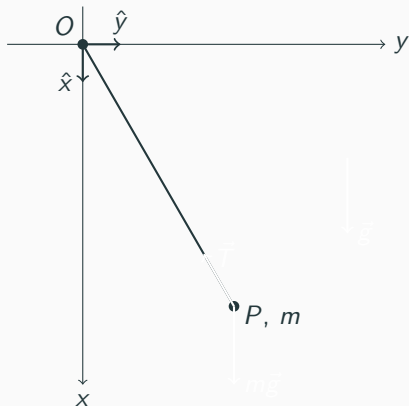


3. modèle de force

force gravifique: $m\vec{g} = mg \hat{x}$

force de liaison: $\vec{T} = T_x \hat{x} + T_y \hat{y}$

dirigée dans le sens du fil: $\frac{\vec{T}}{T} = \frac{\vec{r}}{r}$



4. lois de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$m \vec{g} + \vec{T} = m \vec{a}$$

5. équations différentielles du mouvement

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ mg\hat{x} + T_x\hat{x} + T_y\hat{y} &= m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} \\ T_y &= T_x \end{aligned}$$

il faut également dériver la liaison 2 fois:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l^2 \\ x\dot{x} + y\dot{y} &= 0 \\ x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -mg + T_x \\
 m\ddot{y} &= T_y \\
 T_x y &= T_y x \\
 0 &= x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2
 \end{aligned}$$

système différentiel algébrique

inconnues: T_x , T_y , $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, 4 inconnues et 4 équations

cela devient plus clair ... avec θ

une coordonnée libre θ au lieu des coordonnées liées x et y

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta$$

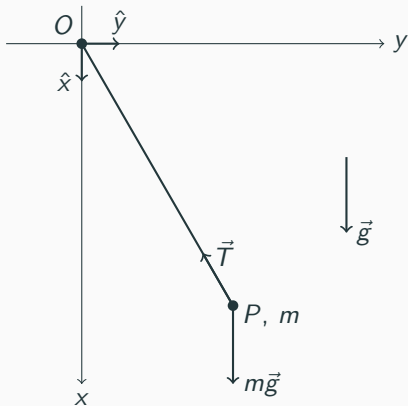
la liaison est automatiquement satisfaite

$$x^2 + y^2 = (l \cos \theta)^2 + (l \sin \theta)^2 = l^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = l^2$$

On introduit la variable T (inconnue pouvant être négative) de telle sorte que

$$T_x = T \cos \theta$$

$$T_y = T \sin \theta$$



exprimons $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ en fonction de $\ddot{\theta}$...

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta$$

$$\dot{x} = -l \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = l \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = -l \sin \theta \ddot{\theta} - l \cos \theta \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{y} = l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2$$

en remplaçant dans les équations différentielles...

$$m\ddot{x} = mg + T_x = mg + T \cos \theta$$

$$m\ddot{y} = T_y = T \sin \theta$$

$$ml \sin \theta \ddot{\theta} - ml \cos \theta \dot{\theta}^2 = mg + T \cos \theta \quad (1)$$

$$ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = T \sin \theta \quad (2)$$

effectuons: (1) $\times \sin \theta$ - (2) $\times \cos \theta$:

$$\ddot{\theta} (-ml \sin^2 \theta - ml \cos^2 \theta) = -m\dot{\theta} = mg \sin \theta$$

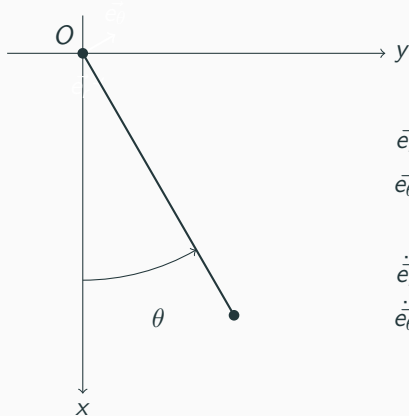
en simplifiant par m et en utilisant $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, on a:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

2 ème méthode de modélisation repère mobile

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)
on ajoute un repère mobile $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



$$\vec{e}_r = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$$

$$\vec{e}_\theta = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$$

$$\dot{\vec{e}}_r = -\hat{x} \sin \theta \dot{\theta} + \hat{y} \cos \theta \dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\hat{x} \cos \theta \dot{\theta} - \hat{y} \sin \theta \dot{\theta} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

2. coordonnées et liaisons

coordonnée: θ

liaison du fil de longueur constante donne une force de liaison, mais pas de liaison sur la coordonnée θ

si on considère deux coordonnées θ et r , alors la liaison s'exprime comme $r = l$, la longueur du fil

3. modèle de force

$$\hat{x} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\hat{y} = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$$

gravité:

$$\vec{g} = g\hat{x} = g \cos \theta \vec{e}_r - g \sin \theta \vec{e}_\theta$$

force de liaison (dans la direction du fil, T inconnu)

$$\vec{T} = T \vec{e}_r$$

4. lois de Newton

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \vec{a} \\ m\vec{g} + \vec{T} &= m \ddot{\vec{OP}}\end{aligned}$$

$$\vec{OP} = l \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{OP}} = l \dot{\vec{e}}_r = l\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\ddot{\vec{OP}} = \frac{d}{dt}(l\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + l\dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta$$

$$= l\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + l\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

5. équations différentielles du mouvement

$$\begin{aligned}T \vec{e}_r + mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta &= m \ddot{\vec{O}P} \\&= m(\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \vec{e}_r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}mg \cos \theta \vec{e}_r + T \vec{e}_r &= -ml \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \\-mg \sin \theta \vec{e}_\theta &= ml \ddot{\theta} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

on trouve la force de liaison

$$T = -ml \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta$$

et l'équation différentielle pour θ

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

on trouve la même force avec le repère fixe, à condition d'effectuer

$$(1) \times \cos \theta + (2) \times \sin \theta$$

$$T = -m l \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta$$

3 ème méthode de modélisation

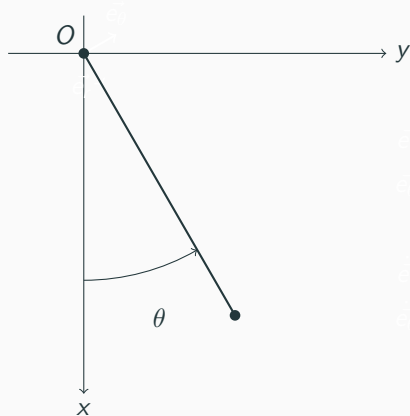
méthode des moments

1. référentiel et repère

le référentiel est le plan fixe (ou en translation uniforme)

on ajoute un repère mobile ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y$)

on ajoute $\hat{z}$ qui sort du plan: $\hat{z} = \hat{x} \wedge \hat{y} = \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$



$$\vec{e}_{x'} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$$

$$\vec{e}_{y'} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$$

$$\vec{e}_{x'} = -\hat{x} \sin \theta \theta + \hat{y} \cos \theta \theta = \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_{y'} = -\hat{x} \cos \theta \theta - \hat{y} \sin \theta \theta = -\theta \vec{e}_x$$

2. coordonnées et liaison, cinématique

coordonnée: θ

liaison du fil, donne une force mais pas d'équation de liaison sur la coordonnée θ

cinématique

$$\vec{OP} = l \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{OP}} = l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

formule de Poisson

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \dot{\theta} (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}) = -\dot{\theta} \begin{vmatrix} \hat{x} & \cos \theta \\ \hat{y} & \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \begin{vmatrix} \hat{x} & 0 & \cos \theta \\ \hat{y} & 0 & \sin \theta \\ \hat{z} & \dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r$$

3. modèle de force

force gravifique:

$$m\vec{g} = mg\hat{x} = -mg \sin \theta \vec{e}_\theta + mg \cos \theta \vec{e}_r$$

force de liaison:

$$\vec{T} = T \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{OP} \wedge m\vec{g} + \vec{OP} \wedge \vec{T} \\ &= (l \vec{e}_r) \wedge mg\hat{x} + (l \vec{e}_r) \wedge (T \vec{e}_t) \\ &= (l \vec{e}_r) \wedge mg(-\sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{e}_z) \\ &= -mg l \sin\theta (\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\rho) \\ &= -mg l \sin\theta \hat{z}\end{aligned}$$

calcul du moment de force avec un déterminant

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{OP} \wedge (mg\hat{x} + T\hat{e}_\theta) \\ &= l\vec{e}_\theta \wedge (mg\hat{x} + T\hat{e}_\theta) \\ &= l\vec{e}_\theta \wedge mg\hat{x} \\ &= l(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \wedge mg\hat{x} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ l\cos\theta & l\sin\theta & 0 \\ mg & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} l\cos\theta & l\sin\theta \\ mg & 0 \end{vmatrix} \hat{z} \\ &= -mg l \sin\theta \hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \vec{OP} \wedge m\vec{v}_P \\ &= l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= ml^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \\ &= ml^2\dot{\theta}\vec{z}\end{aligned}$$

remarque: inertie du pendule $m l^2$ [kg m²]

4. loi de Newton

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

$$\frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta} \hat{z}) = -mgl \sin \theta \hat{z}$$

$$ml^2 \ddot{\theta} = -mgl \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

remarque: la méthode des moments ne permet pas de calculer la tension $\vec{T}$ dans le fil !

approximation des petits angles

Lorsque θ est petit et exprimé en [rad] on a

$$\sin \theta \approx \theta \qquad \cos \theta \approx 1$$

de telle sorte que l'équation différentielle devient analogue à celle de la masse muni d'un ressort (même structure de l'équation, donc solution de même structure, il faut juste remplacer les variables $x \rightarrow \theta$, $k \rightarrow g$, $m \rightarrow I$):

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

comparaison avec l'oscillateur masse-ressort

L'équation différentielle du pendule masse-ressort:

$$\ddot{e} = -\frac{k}{m}e$$

dont la solution est avec $e = x - l_0$

$$e(t) = e(0) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{e}(0) \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

est analogue à celle du pendule simple pour les petits angles θ :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$$

Ainsi la solution du pendule pour des petits angles θ est par analogie:

$$\theta(t) = \theta(0) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + \sqrt{\frac{l}{g}} \dot{\theta}(0) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

Les paramètres du pendule simple à petits angles

la pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [\text{rad/s}]$$

la fréquence

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad [1/\text{s}] = [\text{Hz}]$$

la période

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [\text{s}]$$

avec les nombres complexes...

soit à résoudre

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

Posons $x(t) = Ce^{st}$ **avec** $s \in \mathbb{C}$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$Cs^2e^{st} + \frac{k}{m}Ce^{st} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{k}{m}\right)Ce^{st} = 0$$

conditions

Comme $e^{st} \neq 0$ on a soit $C = 0$ (inutile) soit $C \neq 0$ et

$$s = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ainsi, par principe de superposition (linéarité de l'équation différentielle)

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \tilde{C}_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

avec $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{C}$.

paramétrisation réelle des constantes d'intégration

$$\begin{aligned}\tilde{C}_1 &= \frac{a + ib}{2} \\ \tilde{C}_2 &= \frac{a - ib}{2}\end{aligned}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$

le ressort linéaire avec une masse

regroupement

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{a + ib}{2} e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{a - ib}{2} e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \\&= a \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} - b \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2j}\end{aligned}$$

solution

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - b \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\a &= x(0) \\b &= -\sqrt{\frac{m}{k}}\dot{x}(0)\end{aligned}$$