I. Vecteurs - Cinématique

quelques éléments mathématiques pour la mécanique

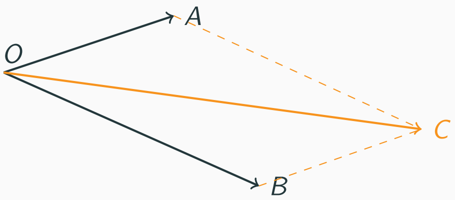
Ph. Müllhaupt

Programme — I. vecteurs, cinématique

1. addition-soustraction
2. produit scalaire
3. déterminant
4. produit vectoriel
5. produit mixte
6. produit triple
7. repère et point matériel
8. trajectoire et équation horaire
9. dérivées
10. la règle de Leibniz
11. calcul des déterminants

1. addition-soustraction

addition

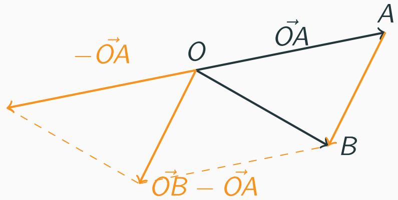


règle du parallélogramme

$$\boxed{\vec{OC} \triangleq \vec{OA} + \vec{OB}}$$

attention

différence entre les points A et B et les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$



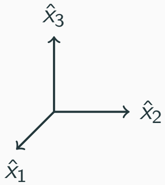
$\equiv$ addition de l'opposé:

$$\boxed{\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OB}+(-\vec{OA})=\vec{AB}}$$

Le plus $+$ est obtenu par la règle du parallélogramme

en composantes:

Il faut un repère:



$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OA} = a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + a_3\hat{x}_3$$

$$\vec{OB} = b_1\hat{x}_1 + b_2\hat{x}_2 + b_3\hat{x}_3$$

en composantes:

$$\begin{aligned}\vec{OA}+\vec{OB} &= a_1\hat{x}_1+a_2\hat{x}_2+a_3\hat{x}_3+b_1\hat{x}_1+b_2\hat{x}_2+b_3\hat{x}_3\\ &= (a_1+b_1)\,\hat{x}_1+(a_2+b_2)\,\hat{x}_2+(a_3+b_3)\,\hat{x}_3\end{aligned}$$

car on peut mettre bout à bout les $a_i\,\hat{x}_i$ avec les $b_i\,\hat{x}_i$ et les $\hat{x}_i$ sont indépendants).

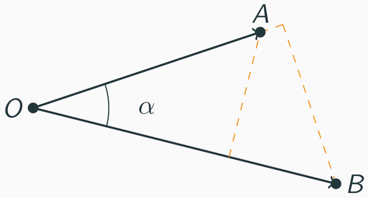
$$\vec{OA}+\vec{OB}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

2. produit scalaire

définition géométrique

$$\boxed{\vec{OA} \cdot \vec{OB} \triangleq \|\vec{OA}\| \, \|\vec{OB}\| \, \cos\alpha}$$

Nécessite la notion de norme $\|\vec{OA}\|$
$\equiv$ la longueur de la flêche.



définition algébrique

$$\boxed{\vec{OA}\cdot\vec{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i}$$

que l'on écrit souvent par un produite matriciel:

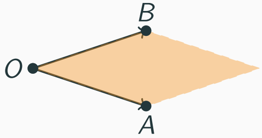
$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

3. déterminant

déterminant

notion géométrique en 2D : surface

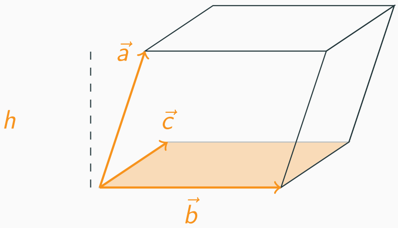
notion géométrique en 3D : volume



$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

3D, déterminant $\equiv$ "volume"



$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

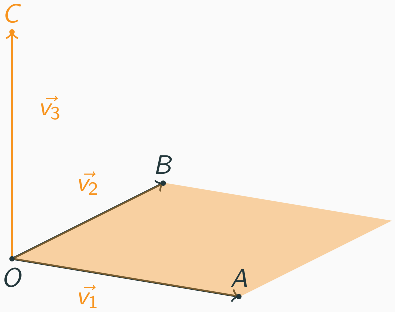
$V = A_{\text{base}}$ x hauteur

4. produit vectoriel

produit vectoriel

$$\begin{aligned} \vec{v_3} &= \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} \\ &= -\vec{v_2} \wedge \vec{v_1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{OC} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}}$$



$\|\vec{v_3}\|$ = aire du parallélogramme construit sur $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$

règle de la main droite

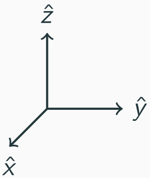
$\vec{OC}$ est dirigé selon la règle de la main droite

$$\vec{v_3} = \vec{v_1} \wedge \vec{v_2}$$

calcul algébrique du déterminant

Soit un repère orthonormé direct

$$\vec{v_1} = x_1\,\hat{x} + y_1\,\hat{y} + z_1\,\hat{z}$$
$$\vec{v_2} = x_2\,\hat{x} + y_2\,\hat{y} + z_2\,\hat{z}$$



$$\vec{v_1} \wedge \vec{v_2} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & x_1 & x_2 \\ \hat{y} & y_1 & y_2 \\ \hat{z} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

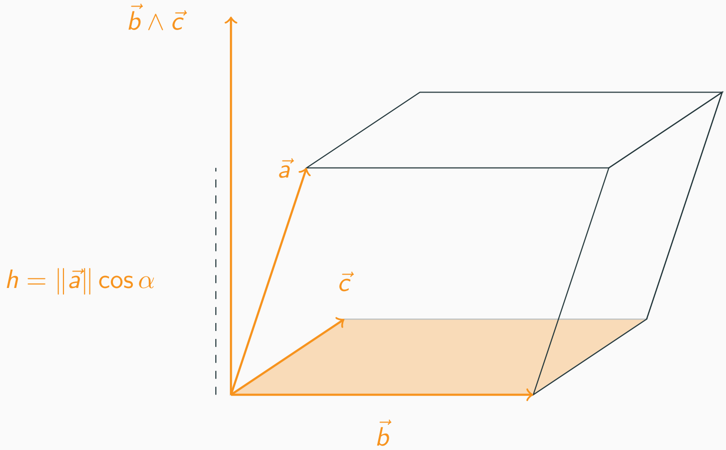
$$\begin{aligned} \vec{v_1} \wedge \vec{v_2} &= \hat{x}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \hat{y}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}(y_1 z_2 - y_2 z_1) - \hat{y}(x_1 z_2 - x_2 z_1) + \hat{z}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned}$$

5. produit mixte

produit mixte

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

en effet...



$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \|\vec{a}\| \cos\alpha \, \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = h \times \|\vec{b} \wedge \vec{c}\| = h \times A_{\text{base}} = V_{\text{olume}}$$

en effet...

$$
\begin{aligned}
\vec{b} \wedge \vec{c} &= \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \hat{x}_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \hat{x}_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \hat{x}_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

6. produit triple

produit triple

théorème

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}$$

démonstration

$$
\begin{aligned}
\vec{b} \wedge \vec{c} &= \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & b_1 & c_1 \\ \hat{x}_2 & b_2 & c_2 \\ \hat{x}_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\
&= (b_2 c_3 - b_3 c_2)\hat{x}_1 + (c_1 b_3 - b_1 c_3)\hat{x}_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)\hat{x}_3
\end{aligned}
$$

$$
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & a_1 & b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ \hat{x}_2 & a_2 & c_1 b_3 - b_1 c_3 \\ \hat{x}_3 & a_3 & b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{vmatrix}
$$

produit triple

démonstration (suite)

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \hat{x}_1(a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_3) \\
&- \hat{x}_2(a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 - a_3 b_2 c_3 + a_3 b_3 c_2) \\
&+ \hat{x}_3(a_1 c_1 b_3 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 x_2) \\
&= \hat{x}_1(a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 c_1 b_3 + a_3 b_1 c_3) \\
&\quad +\hat{x}_1(a_1 b_1 c_1 - a_1 b_1 c_1) \\
&- \hat{x}_2(a_1 b_1 c_2 - a_1 b_2 c_1 - a_3 b_2 c_3 + a_3 b_3 c_2) \\
&\quad +\hat{x}_2(-a_2 b_2 c_2 + a_2 b_2 c_2) \\
&+ \hat{x}_3(a_1 c_1 b_3 - a_1 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_3 + a_2 b_3 x_2) \\
&\quad \hat{x}_3(a_3 b_3 c_3 - a_3 b_3 c_3)
\end{aligned}
$$

chaque terme bleu est nul ($=0$), ils sont utiles pour le regroupement

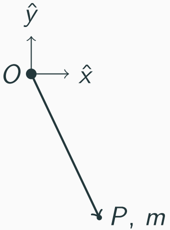
produit triple

Démonstration (suite et fin)

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \hat{x}_1[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] \\
&+ \vec{\hat{x}}_2[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_2] \\
&+ \hat{x}_3[(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_3 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_3] \\
&= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 \hat{x}_1 + b_2 \hat{x}_2 + b_3 \hat{x}_3) \\
&\quad -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)(c_1 \hat{x}_1 + c_2 \hat{x}_2 + c_3 \hat{x}_3) \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}
\end{aligned}
$$

7. repère et point matériel

repère et point matériel



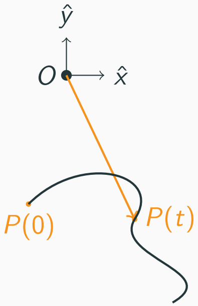
$\vec{r}$ rayon vecteur

$$\vec{r} \triangleq \vec{OP}$$

Le repère est noté en 2D $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$, et en 3D $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$.
Les $\hat{x}_i$ sont tels que $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = 0$, $i \neq j$ et $\|\hat{x}_i\| = \sqrt{\hat{x}_i \cdot \hat{x}_i} = 1$

8. trajectoire et équation horaire

La nouveauté par rapport à la géométrie est que le point P se déplace.



définition (trajectoire)

La trajectoire est le lieu des points $P(t)$ lorsque le temps (paramètre) t varie. C'est la courbe débarassée de la dépendance par rapport au temps.

$$\boxed{\{P(t) | t \in \mathbb{R}^+\}}$$

équation horaire

définition (équation horaire)

C'est la relation (fonction) entre la position du point $P(t)$, donnée par le rayon vecteur $\vec{r}(t)$, et le temps t.

$$t :\to \vec{r}(t)$$

Le temps apparaît explicitement contrairement à la trajectoire qui représente uniquement la trace laissée dans un référentiel (ensemble de points).

vitesse moyenne...

...pour se déplacer de A à B est donnée par le rapport entre la différence des rayons vecteurs entre A et B et le temps pour se déplacer

$$\vec{v} = \frac{\vec{OB} - \vec{OA}}{t_B - t_A} = \frac{\vec{AB}}{t_B - t_A}$$

on peut également écrire

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}(t_B) - \vec{r}(t_A)}{t_B - t_A} = \frac{\vec{OP}(t_B) - \vec{OP}(t_A)}{t_B - t_A}$$

vitesse instantanée

C'est la vitesse moyenne entre deux instants infiniment proche l'un de l'autre, i.e. lorsque t_B et t_A sont très proches (avec $h = t_B - t_A$ et $t = t_A$)

$$\boxed{\vec{v_P}(t) \triangleq \lim_{h \to 0} \frac{\vec{OP}(t+h) - \vec{OP}(t)}{h}}$$

9. dérivées

dérivée

rappel de notation: $\frac{d}{dt}x = \dot{x}$

<u>vitesse instantanée</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{OP} = \dot{\vec{OP}} \triangleq \lim_{h\to 0} \frac{\vec{OP}(t+h) - \vec{OP}(t)}{h} \triangleq \vec{v}_P}$$

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$$

accélération instantanée

$$\ddot{\vec{OP}} = \frac{d}{dt}\vec{v}_P = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{v}_P(t+h) - \vec{v}_P(t)}{h}$$

$$\ddot{\vec{OP}} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

règle de la dérivation de fonctions composées

$$\boxed{(f \circ g)^{'} = (f^{'} \circ g)\, g^{'}}$$

En d'autres termes, $(f(g(t)))^{'} = f^{'}(g(t))\, g'(t)$

exemple important

$$\frac{d}{dt}\sin(\theta(t)) = \cos(\theta(t))\,\dot{\theta}(t)$$

dans cet exemple, $f = \sin$, $g = \theta$, $f^{'} = \cos$, $g^{'} = \dot{\theta}$

10. la règle de Leibniz

Formulation classique (analyse)

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Autres formulations de la même propriété

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(a(t)b(t)) &= \left(\frac{d}{dt}a(t)\right) b(t) + a(t)\left(\frac{d}{dt}b(t)\right) \\
\overbrace{a(t)b(t)}^{\cdot} &= \dot{a}(t)b(t) + a(t)\dot{b}(t) \\
\overbrace{ab}^{\cdot} &= \dot{a}b + a\dot{b}
\end{aligned}$$

appliquée au produit scalaire

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}}$$

appliquée au produit vectoriel

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \dot{\vec{a}} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}}}$$

11. calcul des déterminants

par développement récursif

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

est le développement selon la première colonne.

tableau des signes (signature)

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

règle de Sarrus

somme des trois diagonales − somme des trois anti-diagonales

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

par permutation circulaire des indices

$$\sum_{i,j,k,\ \text{circulaire}} \pm a_i b_j c_k$$

avec le signe $+$: permutation circulaire des indices 1,2,3

$$(1,2,3) \quad (3,1,2) \quad (2,3,1)$$

avec le signe $-$: permutation circulaire des indices 3,2,1

$$(3,2,1) \quad (2,1,3) \quad (1,3,2)$$

et donc

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

complément: démonstration de la règle de Leibniz
produit scalaire et vectoriel

La règle de Leibniz pour le produit scalaire

$$\dot{\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}} = \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\dot{\overbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}} &= \frac{d}{dt}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= \frac{d}{dt}(a_1b_1) + \frac{d}{dt}(a_2b_2) + \frac{d}{dt}(a_3b_3) \\
&= (\dot{a}_1b_1 + a_1\dot{b}_1) + (\dot{a}_2b_2 + a_2\dot{b}_2) + (\dot{a}_3b_3 + a_3\dot{b}_3) \\
&= (\dot{a}_1b_1 + \dot{a}_2b_2 + \dot{a}_3b_3) + (a_1\dot{b}_1 + a_2\dot{b}_2 + a_3\dot{b}_3) \\
&= \dot{\vec{a}}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}
\end{aligned}$$

La règle de Leibniz pour le produit vectoriel

$$\dot{\overbrace{\vec{a} \wedge \vec{b}}} = \dot{\vec{a}} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}}$$

La règle de Leibniz pour le produit vectoriel

Démonstration

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \wedge \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{x}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{x}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\
\overbrace{\vec{a} \wedge \vec{b}}^{\cdot} &= \begin{pmatrix} \dot{a}_2 b_3 + a_2 \dot{b}_3 - \dot{a}_3 b_2 - a_3 \dot{b}_2 \\ \dot{a}_3 b_1 + a_3 \dot{b}_1 - \dot{a}_1 b_3 - a_1 \dot{b}_3 \\ \dot{a}_1 b_2 + a_1 \dot{b}_2 - \dot{a}_2 b_1 - a_2 \dot{b}_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dot{a}_2 b_3 - \dot{a}_3 b_2 \\ \dot{a}_3 b_1 - \dot{a}_1 b_3 \\ \dot{a}_1 b_2 - \dot{a}_2 b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \dot{b}_3 - a_3 \dot{b}_2 \\ a_3 \dot{b}_1 - a_1 \dot{b}_3 \\ a_1 \dot{b}_2 - a_2 \dot{b}_1 \end{pmatrix} \\
&= \dot{\vec{a}} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \dot{\vec{b}}
\end{aligned}
$$