XIV. Statique

torseurs, moment et résultante, conditions d’équilibre, travaux virtuels

Ph. Müllhaupt

programme — XIV. Statique

1. ensemble de forces (torseur)

   élements de réduction (moment $\vec{M}_A$ et résultante $\vec{R}$)

   conditions de l'équilibre

   exemple : table avec masse

   coupe virtuelle

2. travaux virtuels

   liaison bilatérale parfaite et principe de d'Alembert

   principe des travaux virtuels des forces exercées et équilibre

   exemple

ensemble de forces (torseur)

Ensemble de forces (torseur)

définition du torseur

Un torseur est un ensemble fini ou infini de vecteurs liés (ou glissants) de même nature noté

$$\mathcal{T} \quad = \quad \{(P_1, \vec{v_1}), (P_2, \vec{v_2}), \ldots, (P_N, \vec{v_N})\}$$

où $\vec{v_\alpha}$ est un vecteur lié (ou glissant) au point P_α (ou le long d'une droite passant par P_α dans le cas d'un vecteur glissant).

remarque

Il existe dans la littérature des définitions plus formelles du concept de torseur. Pour l'étude élémentaire de la statique, la définition ci-dessus suffit. Il faut remarquer que le torseur n'implique pas nécessairement des forces comme ensemble de vecteurs. Pour la statique, les vecteurs $\vec{v_\alpha}$ seront néanmoins des forces.

éléments de réduction par rapport à un point arbitraire A

résultante

$$\vec{R} = \sum_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

moment au point A

$$\vec{M}_A = \sum_{\alpha} \vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{v}_{\alpha}$$

Règle BABAR ... pour le transfert de moment

théorème de transfert (règle BABAR...)

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\vec{M}_B &= \sum_\alpha \vec{BP}_\alpha \wedge \vec{v}_\alpha \\
&= \sum_\alpha \left(\vec{BA} + \vec{AP}_\alpha\right) \wedge \vec{v}_\alpha \\
&= \vec{BA} \wedge \left(\sum_\alpha \vec{v}_\alpha\right) + \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{v}_\alpha \\
&= \vec{BA} \wedge \vec{R} + \vec{M}_A \\
&= \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}
\end{aligned}$$

conditions de l’équilibre

En tout point A arbitraire, les éléments de réduction du torseur $\{P_\alpha, \vec{F}_\alpha\}$ des forces $\vec{F}_\alpha$ appliquées au point P_α sont nuls afin de garantir l’équilibre statique :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = 0 \\ \vec{M}_A &= \sum_\alpha \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha = 0 \end{aligned}$$

énoncé

Une table horizontale de masse M repose sur deux pieds équidistants situés à une longueur r de chaque extrémité de la table. On demande (a) de calculer la masse d'un objet posé à l'extrémité de la table sans que celle-ci ne bascule ; (b) les forces que les pieds exercent alors en A et B.

table avec masse

torseur de forces

- $\vec{F}_A$: force du pied en A
- $\vec{F}_B$: force du pied en B
- $M\vec{g}$: poids de la table
- $m\vec{g}$: poids de la personne en C

$$\mathcal{T} = \{(A, \vec{F}_A), (B, \vec{F}_B), (G, M\vec{g}), (C, m\vec{g})\}$$

table avec masse

A la limite du basculement $\vec{F_A} = 0$

condition d'équilibre

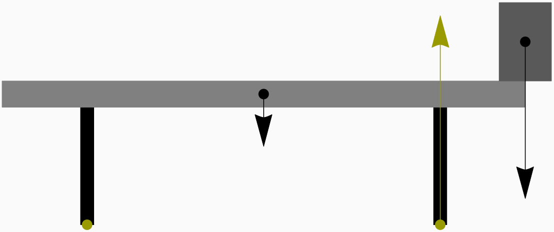
La réduction du torseur par rapport à n'importe quel point P est nul $(\vec{R} = 0, \vec{M_P} = 0)$.

En choisissant $P = C$:

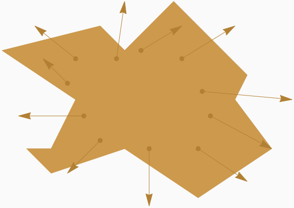
$$
\begin{aligned}
\vec{M_C} &= 0 = \vec{CG} \wedge M\vec{g} + \vec{CB} \wedge \vec{F_B} \\
&= Mg\frac{L}{2} - r\vec{F_B} \\
\vec{R} &= 0 = M\vec{g} + \vec{F_B} + m\vec{g}
\end{aligned}
$$

condition d’équilibre (suite et fin)

$$
\begin{aligned}
F_A &= 0 \\
F_B &= Mg\frac{L}{2r} \\
m &= M\left(\frac{L}{2r} - 1\right)
\end{aligned}
$$



contexte et torseur de forces

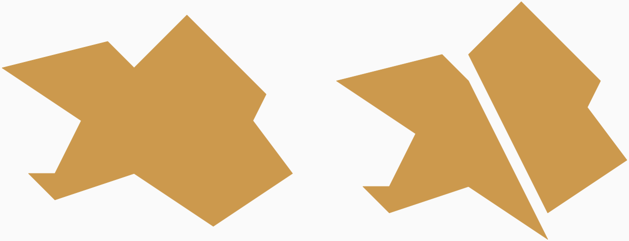


On considère un solide et des forces $\vec{F}_\alpha$ qui s'appliquent chacune en un point particulier P_α du solide. Ceci donne naissance au torseur

$$\mathcal{T} = \{(P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), \ldots, (P_N, \vec{F}_N)\}$$

coupe virtuelle

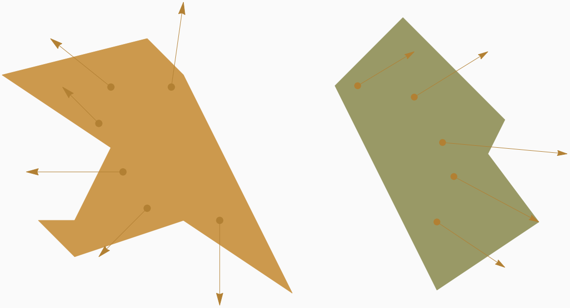
On considère une séparation du corps solide en deux blocs, un bloc γ et un bloc δ. La séparation s'effectue, par exemple, par un plan de coupe arbitraire.



décomposition du torseur en deux

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_\gamma \cup \mathcal{T}_\delta$$

avec $\mathcal{T}_\gamma$ qui contient les éléments $(P_\alpha, \vec{F}_\alpha) \in \mathcal{T}_\gamma$, et $\mathcal{T}_\delta$ qui contient les éléments $(P_\beta, \vec{F}_\beta) \in \mathcal{T}_\delta$



coupe virtuelle

lors de l'équilibre statique, et pour un point quelconque A

$$
\begin{aligned}
\vec{R}^{\gamma} + \vec{R}^{\delta} &= 0 \\
\vec{M}_A^{\gamma} + \vec{M}_A^{\delta} &= 0
\end{aligned}
$$

travaux virtuels

travaux virtuels

contexte

L'objectif est de donner une condition de l'équilibre statique qui implique le travail virtuel des forces appliquées (celles autres que les forces de contraintes des liaisons) pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons

système : N points matériels P_i, $i = 1, \ldots, N$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{T}_i$$

travail virtuel pour tout $\delta \vec{r}_i$ compatible

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (F_i + T_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \bullet \delta \vec{r}_i$$

liaison bilatérale parfaite et principe de d’Alembert

rappel

Le principe de d’Alembert garantit que le travail virtuel des forces des liaisons bilatérales est nul lors de tout déplacement virtuel compatible avec ces liaisons. Ceci est valable hors équilibre (mouvement) et à l’équilibre (statique).

formulation du principe de d’Alembert

$$\sum_{i=0}^{N}\left[(\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i)\bullet\delta\vec{r}_i\right]=0$$

pour tout $\delta\vec{r}_i$ compatible avec les contraintes bilatérales

travaux virtuels de forces exercées et équilibre statique

condition uniquement à l'équilibre

Le travail virtuel des forces exercées est nul à l'équilibre statique pour tout déplacement compatible avec les liaisons bilatérales

condition pour l'équilibre statique

pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons bilatérales :

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \bullet \delta\vec{r}_i = 0$$

$$\Updownarrow$$

équilibre statique

principe des travaux virtuels

théorème

A l'équilibre ($\dot{q}_i$, $\ddot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$) lors de contraintes bilatérales

$$\Downarrow$$

$$\delta W \;=\; 0$$

démonstration

Les contraintes bilatérales associées au principe de d'Alembert conduisent (cf. Lagrange II et III) à

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

démonstration (suite)

Le Lemme I (cf. diapos suivantes) implique qu'à l'équilibre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad \forall r \in 1, \ldots, n$$

ce qui donne

$$\delta W = 0$$

et achève ainsi la démonstration

lemme I

A l'équilibre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad \forall r \in 1, \ldots, n$$

démonstration

Le lemme II (cf. diapos suivantes) donnent

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

démonstration du Lemme I (suite)

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} &= \sum_{i=1}^{n} m_{ir}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_i \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left[m_{ir}\ddot{q}_i + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial m_{ir}}{\partial q_j}\dot{q}_j\dot{q}_i\right]\end{aligned}$$

et ainsi à l'équilibre ($\dot{q}_i = 0$ et $\ddot{q}_i = 0$, $\forall i \in q, \ldots n$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0$$

démonstration du Lemme I (suite)

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_r}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

et ainsi à l'équilibre ($\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$)

$$\frac{\partial T}{\partial q_r} = 0$$

et on achève ainsi la démonstration du Lemme I

Lemme II
T est une forme quadratique des vitesses, à savoir

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} m_{ij}(q_1, \dots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

démonstration
Par définition

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(q_1, \dots, q_n) \\ y_i &= g_i(q_1, \dots, q_n) \\ z_i &= h_i(q_1, \dots, q_n) \end{aligned}$$

démonstration du Lemme II (suite)

ainsi

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{2}$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{3}$$

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{4}$$

sont des formes linéaires des vitesses $\dot{q}_i$

démonstration du Lemme II (suite)

ce qui implique que $\dot{x}_i^2$, $\dot{y}_i^2$ et $\dot{z}_i^2$, $i = 1, \ldots, N$ deviennent des formes quadratiques des vitesses $\dot{q}_i$, $i = 1, \ldots, n$. En effet, en remplaçant (2), (3) et (4) dans (1), puis en réarrangeant les termes, la démonstration du Lemme II s'achève en produisant

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n} m_{ij}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

principe des travaux virtuels

réciproque

Lors de contraintes bilatérales et lorsque les vitesses $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$ conjointement avec

$$\delta W = 0$$

cela implique l'équilibre, c.-à-d.

$$\ddot{q}_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

démonstration de la réciproque

$$\delta W = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

implique (puisque les δq_i peuvent être choisis arbitrairement)

$$Q_r - \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \qquad r = 1, \ldots, n$$

et en appliquant Lagrange (avec $\dot{q}_i = 0$, $i = 1, \ldots n$) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} &= Q_r - \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{ir}(q_1, \ldots, q_n)\ddot{q}_i = 0 \qquad r = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

démonstration de la réciproque (suite)

On peut montrer que la matrice

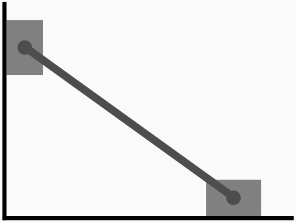
$$\begin{pmatrix} m_{11}(q_1,\ldots,q_n) & m_{12}(q_1,\ldots,q_n) & \ldots & m_{1n}(q_1,\ldots,q_n) \\ m_{11}(q_1,\ldots,q_n) & m_{12}(q_1,\ldots,q_n) & \ldots & m_{1n}(q_1,\ldots,q_n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1}(q_1,\ldots,q_n) & m_{n2}(q_1,\ldots,q_n) & \ldots & m_{nn}(q_1,\ldots,q_n) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $q_1,\ldots,q_n$ ce qui implique

$$\ddot{q}_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$$

ce qui achève la démonstration de la réciproque

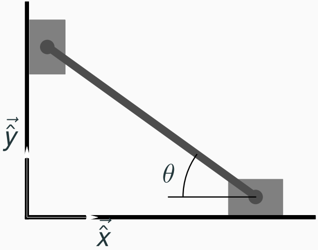
blocs reliés et appuyés contre des parois



Deux blocs de même masse m sont reliés par une tige de longueur l et l'ensemble est en équilibre statique. Déterminer la force à exercer sur le deuxième bloc en fonction de l'angle de la tige. Il n'y a pas de frottement

exemple

repère et liaisons bilatérales



4 coord. cartésiennes : x_1, y_1, x_2 et y_2
(centre de masse de chaque bloc)

3 liaisons bilatérales :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \bar{x}_1 = \text{cte} \\
y_2 &= \bar{y}_2 = \text{cte} \\
l^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2
\end{aligned}
$$

1 coordonnée généralisée : θ

exemple

liaisons sous forme explicite (en fonction de θ)

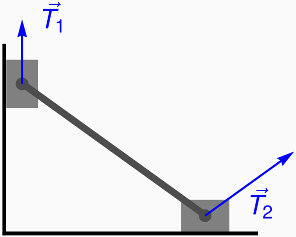
$$
\begin{aligned}
x_1 &= \bar{x}_1 \\
y_1 &= \bar{y}_2 + l \sin\theta \\
y_2 &= \bar{y}_2 \\
x_2 &= \bar{x}_1 + l \cos\theta
\end{aligned}
$$

déplacements virtuels compatibles

tout déplacement δx_2 et δy_1 qui satisfasse

$$
\begin{aligned}
0 &= (\bar{x}_1 - x_2)\delta x_2 + (y_1 - \bar{y}_2)\delta y_1 \\
\delta x_2 &= -l \sin\theta\,\delta\theta \\
\delta y_1 &= l \cos\theta\,\delta\theta
\end{aligned}
$$

principe de d'Alembert



<u>que le système soit en équilibre ou non :</u>

$$T_{1x}\delta x_1 + T_{1y}\delta y_1 + T_{2x}\delta x_2 + T_{2y}\delta y_2 = 0$$

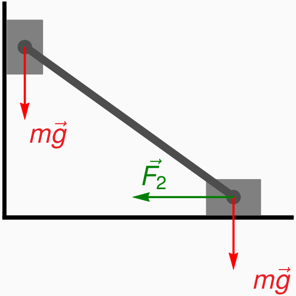
pour tout déplacement virtuel compatible, et donc sous liaisons :

$$\begin{aligned} T_{1y}\delta y_1 + T_{2x}\delta x_2 &= 0 \\ (T_{1y} l \cos\theta - T_{2x} l \sin\theta)\delta\theta &= 0 \\ &\Downarrow \\ T_{1y} = T_{2x}\tan\theta & \end{aligned}$$

avec T_{2x} déterminé par le type de mouvement ou par la condition d'équilibre

condition d'équilibre par le principe des travaux virtuels

des forces appliquées !



Pour tout déplacement virtuel compatible et uniquement à l'équilibre :

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta W = -mg\delta y_1 + F_2\delta x_2 = 0 \\
&= -mgl\cos\theta\delta\theta + F_2 l\sin\theta\delta\theta = 0 \\
&\Downarrow \\
F_2 &= mg\frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
$$

exemple

Le principe de d’Alembert...

permet de faire disparaître les forces de liaison (paroi + tige) de la condition d’équilibre. Ne permet pas de déterminer les forces de liaison entièrement. Seul une relation est établie

$$T_{2x} = T_{1y} \frac{1}{\tan\theta}$$

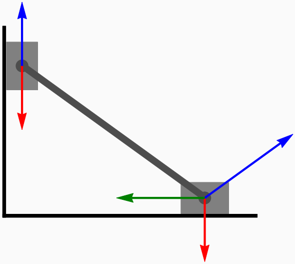
Le principe des travaux virtuels...

des forces appliquées permet de déterminer la condition de l’équilibre et permet de déterminer la force purement horizontale à appliquer pour garantir l’équilibre sans faire intervenir les forces de liaisons (paroi + tige)

$$F_2 = mg \frac{1}{\tan\theta}$$

exemple

la détermination des forces de contraintes $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$...



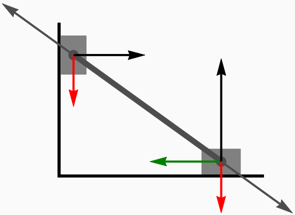
nécessite de considérer les forces de liaisons comme des forces appliquées et de supprimer les liaisons

$$\begin{aligned}\delta W &= 0 = T_{1x}\delta x_1 + (-mg + T_{1y})\delta y_1 \\ &\quad +(F_2 + T_{2x})\delta x_2 + (-mg + T_{1y})\delta y_1\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}T_{1x} &= 0 \\ T_{1y} &= mg \\ T_{2x} &= -F_2 = -mg\frac{1}{\tan\theta} \\ T_{2y} &= mg\end{aligned}$$

forces exercées par la tige et les parois



La méthode classique (par exemple torseur de forces) doit assumer une structure des forces de contraintes :

1. le long de la tige : $\vec{T}_1^{\mathrm{t}}$ et $\vec{T}_2^{\mathrm{t}}$
2. perpendiculaire aux parois : $\vec{T}_1^{\mathrm{p}}$ et $\vec{T}_2^{\mathrm{p}}$

équivalence entre les forces de liaisons :

$$
\begin{aligned}
\vec{T}_1 &= \vec{T}_1^{\mathrm{t}} + \vec{T}_1^{\mathrm{p}} \\
\vec{T}_2 &= \vec{T}_2^{\mathrm{t}} + \vec{T}_2^{\mathrm{p}}
\end{aligned}
$$