

XIII. Frottement

Frottement visqueux (solide dans gaz ou liquide) –
Frottement sec (solide contre solide). Frottement sec
statique et frottement sec dynamique. Liaisons, liaisons
bilatérales et unilatérales.

Ph. Müllhaupt

Programme — XIII. Frottement

1. frottement visqueux

basse vitesse

haute vitesse

2. frottement sec (loi de Coulomb)

forces en présence et nomenclature

statique

cinétique

3. forces généralisées

4. liaison

liaison bilatérale

liaison unilatérale

liaison holonôme et non-holonôme

liaison parfaite

frottement visqueux

Contexte

Le frottement visqueux est la résistance que subit un corps solide par son déplacement dans un corps fluide ou gazeux. On distinguera :

1. le déplacement lent du solide (de telle sorte que l'écoulement du fluide autour du solide demeure régulier ; on parle alors d'écoulement laminaire)
2. le déplacement rapide à haute vitesse du solide (de telle sorte que l'écoulement autour du solide soit de nature turbulente)

formule générale du frottement visqueux

Le fluide exerce sur le solide une force donnée par

$$\vec{F}^v = -f(\vec{v})\vec{\hat{v}}$$

1. la force s'exerce sur le solide dans le sens contraire de la vitesse du solide
2. la fonction f est une fonction scalaire de la vitesse vectorielle $\vec{v}$. Elle donne un nombre positif ou nul $f(\vec{v}) \geq 0$ et caractérise le type de frottement visqueux (basse vitesse ou haute vitesse)
3. le vecteur $\vec{\hat{v}}$ est un vecteur unité dans le sens du vecteur vitesse $\vec{v}$
4. si $f(\vec{v}) = 0$, il n'y a pas de frottement

frottement visqueux (basse vitesse)

A basse vitesse...

$$F^r = -k_0 \vec{v}$$

1. k est un coefficient de forme. Pour la sphère,

$$k = 6\pi R$$

, avec R le rayon de la sphère

$$[\text{m}]$$

2. η est le coefficient de viscosité du fluide. Ses unités sont

$$[\text{N m}^{-2} \text{s}]$$

frottement visqueux (coefficient de viscosité)

liquide

matière	η	$[\text{Nm}^{-2}\text{s}]$
eau 0	1.8	10^{-3}
eau 20	1	10^{-3}
eau 40	0.66	10^{-3}
glycérine	1490	10^{-3}
huile	10	10^{-3}
alcool	0.37	10^{-3}

gaz

matière	η	$[\text{Nm}^{-2}\text{s}]$
air 0	1.7	10^{-5}
air 20	1.81	10^{-5}
air 40	1.91	10^{-5}
H ₂	0.93	10^{-5}
CO ₂	1.46	10^{-5}

à haute vitesse...

$$F_{\text{fl}} = -C_x \frac{1}{2} \rho_{\text{fl}} |\vec{v}|^2 S \vec{v}$$

- ρ_{fl} est la masse spécifique du fluide (aussi appelée masse volumique)
- C_x est le coefficient de traînée. C'est un coefficient aérodynamique adimensionnel. Pour un disque $C_x \approx 1.32$, pour une sphère $C_x \approx 0.45$
- S est la surface (aire) maximale de toute les sections du solide par un plan perpendiculaire à $\vec{v}$. Aire de la section maximale perpendiculaire à $\vec{v}$.

frottement visqueux (C_x de quelques formes...)

disque $C_x \approx 1.32$

sphère $C_x \approx 0.45$

demi-sphère + cône $C_x \approx 0.04$

aile d'avion $C_x \approx 0.03$

analyse des unités

$$\frac{1}{2} C_x \rho_{fl} \|\vec{v}\|^2 S$$

$$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \times \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right] \times [\text{m}^2] = \left[\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = [\text{N}]$$

frottement sec (loi de Coulomb)

frottement entre deux surfaces en contact

Les surfaces s'opposent au mouvement

1. **force de frottement statique** : Lorsque les deux surfaces sont à l'arrêt l'une par rapport à l'autre (la vitesse relative entre les deux corps est nulle), la force de frottement statique s'applique sur chaque corps et elle est égale et opposée à la résultante des forces appliquée sur le corps correspondant. Passé une valeur maximale de la force appliquée, la force de frottement soudainement disparaît pour faire place à la force de frottement cinétique

frottement entre deux surface en contact

Les surfaces s'opposent au mouvement

2. **force de frottement cinétique** : Lorsque les deux surfaces se déplacent l'une par rapport à l'autre, une force de frottement s'exerce sur chacun des corps et ne dépend que du module de la force normale à la surface et est indépendante du module de la vitesse. Elle s'exerce dans le sens contraire de la vitesse relative entre les deux corps.

forces en présence et nomenclature

- $\vec{F}^{\text{pot}}$: résultante des forces issues de potentiels
- $\vec{F}^{\text{n.c.}}$: résultante des forces non conservatives
- $\vec{T}$: résultante des forces de liaison parfaite
- $\vec{F}$: résultante de toutes les forces

$$\vec{F} = \vec{F}^{\text{pot}} + \vec{F}^{\text{n.c.}} + \vec{T}$$

décomposition des forces en présence

- $\vec{F}_{\text{fr}}$: force de frottement (force non conservative)
- $F^{\vec{n}.c. 2}$: autres forces non conservatives
- $\vec{N}$: normale à la surface de contact (force de liaison parfaite)
- $\vec{T}_2$: autres forces de liaison parfaite

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \vec{N} + \vec{T}_2 \\ F^{\vec{n}.c.} &= F^{\vec{n}.c. 1} + F^{\vec{n}.c. 2}\end{aligned}$$

définition des forces appliquées $\vec{F}_a$

$$\vec{F}_a = F^{\vec{n}.c. 1} + F^{\vec{n}.c. 2} + \vec{T}$$

loi de Coulomb pour le frottement sec statique

$$|\vec{F}_{\text{fr}}| \leq F_{\text{max}}^{\text{fr}} = \mu_s |\vec{N}|$$

- $F_{\text{max}}^{\text{fr}}$: Module de la force maximale que peut subir le solide avant de se mettre en mouvement
- μ_s : coefficient de frottement statique
- $\vec{N}$: force de réaction normale à la surface.
- $\vec{F}_{\text{fr}}$ ne dépend pas de la dimension des surfaces en contact
- $\vec{F}_{\text{fr}}$ dépend de la nature des surfaces en contact
- $\vec{F}_{\text{fr}}$ est égale et opposée à la résultante des forces appliquées $\vec{F}_a$

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -\vec{F}_a$$

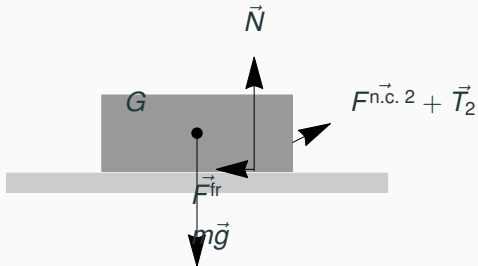


Figure 1 – Cas où $F^{\text{pot}} = m\vec{g}$

Pour autant que $\|\vec{F}_a\| < F_{\text{max}}^{\text{fr}}$

$$\vec{F}_a = F \vec{e}_{\phi,2} + \vec{T}_2 + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$\vec{F}^{\text{fr}} = -\vec{F}_a$$

$$\vec{F} = \vec{F}_a + \vec{F}_f = 0$$

Loi de Coulomb des frottements secs cinétiques

$$\vec{F}_{\text{fr}} = -\mu_c |\vec{N}| \vec{v}$$

- μ_c : coefficient de frottement sec cinétique (indépendant de la vitesse)
- $\vec{N}$: force normale à la surface
- $\vec{v}$: vecteur unité le long de la vitesse $\vec{v}$ du solide
- pour autant que $\vec{v}$ soit constant à la fois en module et en direction,
 $\vec{F}_{\text{fr}}$ est indépendant et de la dimension de la surface en contact
- $\vec{F}_{\text{fr}}$ dépend de la nature des surfaces en contact
- $\vec{F}_{\text{fr}}$ est constant en fonction du module de la vitesse

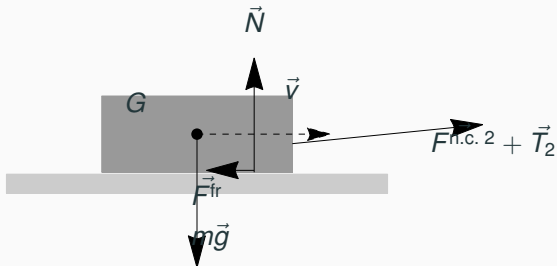


Figure 2 – Cas où $F_{\text{pot}} = m\vec{g}$ et où le corps accélère

Coefficient cinétique μ_c et statique μ_s

nature des surfaces en contact	μ_c	μ_s
acier sur acier, dur, sec	0.42	0.78
acier sur acier, dur, gras	0.05	0.10
acier sur acier, surfaces polies	10^{-2}	10^{-1}
bois sur bois, sec	0.3	0.5
métal sur glace	0.01	0.03
pneu sur route sèche	0.6	0.8
pneu sur route mouillée	0.1	0.15

forces généralisées

forces généralisées

Dans le formalisme de Lagrange, lors de forces non conservatives on remplace 0 dans le membre de droite par une expression appelée force généralisée F_{q_i} , également noté Q_i , selon la coordonnées q_i (dans la "moulinette" pour q_i).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i$$

$$Q_i = F_i$$

comment obtenir Q_i ?

calculer le travail infinitésimal des forces non conservatives appliquées :

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

factoriser pour faire apparaître les déplacements infinitésimaux des coordonmnées généralisées

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_{q_i} \delta q_i$$

les expressions devant les δq_i sont les forces généralisées F_{q_i}

liaisons
liaisons unilatérales et bilatérales
liaisons non-holonôme
liaisons parfaites

liaison

coordonnées

Ce sont des nombres $q_1, q_2, \dots, q_n$ qui décrivent la configuration d'un système mécanique. La configuration est la position (absolue ou relative) des différents constituants du système mécanique

définition

Une contrainte ou liaison est une restriction du mouvement qui implique que les valeurs des coordonnées $q_1, q_2, \dots, q_n$, des vitesses $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$, et du temps t sont limitées par rapport à toutes les possibilités que pourraient prendre ces grandeurs

hypothèse

Il est toujours possible de remplacer les liaisons (ou contraintes) par des forces dites forces de liaison (ou de contrainte) et de considérer le système comme un système sans contrainte soumis à l'action des forces de liaisons

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{T}_i \quad i = 1, \dots, N$$

avec

$\vec{T}_i$	forces de liaison
$\vec{F}_i$	forces appliquées

définition

Une liaison bilatérale est une liaison qui s'exprime au moyen d'une égalité de la forme

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

définition

Une liaison unilatérale exclut un sous-espace des valeurs des coordonnées des vitesses et du temps. Ce sont des conditions qui s'introduisent ou qui cessent brusquement au cours du temps : particule dans une enceinte ; point matériel attaché à un fil souple mais inextensible, skieur sur tremplin, etc. Elle s'exprime par une inégalité

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \geq 0$$

définition d'une liaison holonôme

C'est une liaison qui peut se ramener à une liaison uniquement entre les coordonnées sans faire intervenir les vitesses

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

ou

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Si les vitesses apparaissent, il doit être possible après intégration de trouver une liaison équivalente où les vitesses n'interviennent pas

liaison non-holonôme

Lorsqu'il est impossible de trouver une liaison équivalente qui ne fasse pas intervenir les vitesses, on parle alors d'une liaison non-holonôme

définition

Une liaison parfaite est une liaison qui obéit au principe des travaux virtuels. C'est le cas des liaisons des forces de réactions à l'intérieur d'un corps solide, de la réaction sans frottement du sol, d'un fil rigide dans le cas du pendule simple, etc.