Formalisme de Lagrange dérivation des équations

Philippe Müllhaupt

Institut de Génie Mécanique

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Physique Générale I

Table des matières

Déplacement virtuel

Définition du déplacement virtuel

On considére un ensemble de contraintes entre plusieurs coordonnées du type

$$f_i(q_1, q_2, \ldots, q_l, t) = 0 \qquad i = 1, \ldots m$$

Un déplacement virtuel est un déplacement infinitésimal quelconque des coordonnées δq_1, δq_2 …, δq_l tel que les équations

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_l}\delta q_n = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$

soient satisfaites. Le temps est figé de telle sorte que

$$\frac{\partial f_i}{\partial t}\delta t = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

Point de départ pour les équations de Lagrange

Contexte

Plusieurs points matériels P_i, $i = 1, \ldots, N$ sont soumis à un certains nombre de contraintes indépendantes, disons m de telle sorte que $n = N - m$ coordonnées soient libres et appelées coordonnées généralisées q_1, q_2, ..., q_n. On part de l'expression des coordonnées des points en fonction des coordonnées généralisées

Liaisons (explicites)

$$\begin{aligned} x_i &= f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ y_i &= g_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ z_i &= h_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \end{aligned}$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

Forces et équations du mouvement

N points matériels sont sujets à des forces. Soit $(F_{x,i}, F_{y,i}, F_{z,i})$ les composantes des forces appliquées (forces issues de potentiels et forces non conservatives). Soit $(T_{x,i}, T_{y,i}, T_{z,i})$ les composantes des forces de liaisons.

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{x,i} + T_{x,i} \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{y,i} + T_{y,i} \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{z,i} + T_{z,i} \end{aligned}$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

Soit $r \in 1 \ldots n$ et multiplions ces équations respectivement par...

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_r} \qquad \frac{\partial g_i}{\partial q_r} \qquad \frac{\partial h_i}{\partial q_r}$$

... pour obtenir ...

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + \ddot{y}_i \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + \ddot{z}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_r} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} \left((F_{x,i} + T_{x,i}) \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + (F_{y,i} + T_{y,i}) \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + (F_{z,i} + T_{z,i}) \frac{\partial h_i}{\partial q_r} \right)$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

Règle de la dérivation en chaîne

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_r}\dot{q}_r + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t}\right)$$

... et comme il n'y a qu'un terme en $\dot{q}_r$...

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_r}\dot{q}_r + \ldots\right) = \frac{\partial f_i}{\partial q_r}$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

Appliquons la règle de Leibniz dans le sens contraire...

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} = \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_r}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_1 \partial q_r}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_n \partial q_r}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_r}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(x_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r}
\end{aligned}
$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

... ainsi ...

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)\end{aligned}$$

En procédant de même pour y_i et z_i, puis en pondérant par les masse

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + \ddot{y}_i \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + \ddot{z}_i \frac{\partial h_i}{\partial q_r}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right)$$

Energie cinétique

Définition

La quantité

$$T := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

représente l'énergie cinétique du système, et on sait que l'on peut l'exprimer en fonction des coordonnées généralisées q_1, q_2, ..., q_n. C'est donc une fonction du type

$$T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t)$$

Composante cinétique des équations de Lagrange

Récapitulatif

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left((F_{x,i}+T_{x,i})\frac{\partial f_i}{\partial q_r} + (F_{y,i}+T_{y,i})\frac{\partial g_i}{\partial q_r} + (F_{z,i}+T_{z,i})\frac{\partial h_i}{\partial q_r}\right)$$

Le principe de d’Alembert

Principe

Les forces de liaisons parfaites (par exemple les forces d’action réaction qui maintiennent un ensemble de points matériels afin de constituer un solide) n’engendrent pas de travail pour satisfaire les contraintes dont elles sont issues. Lors de déplacements infinitésimaux compatibles avec les contraintes parfaites — avec le temps figé — ces forces de liaison ne produisent pas de travail

Application du principe de d'Alembert

Pour tout déplacement virtuel δx_i, δy_i, δz_i compatibles avec les contraintes...

$$\sum_{i=0}^{N} T_{x,i}\delta x_i + T_{y,i}\delta y_i + T_{z,i}\delta z_i = 0$$

... les forces de liaison ne contribuent pas au travail virtuel

$$\sum_{r=0}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(T_{x,i}\frac{\partial f_i}{\partial q_r} + T_{y,i}\frac{\partial g_i}{\partial q_r} + T_{z,i}\frac{\partial h_i}{\partial q_r}\right)\right]\delta q_r = 0$$

Forces appliquées

Forces issues de potentiels

Ce sont les forces conservatives, c.-à-d. celles dont le travail ne dépend pas du chemin d'intégration. En chaque point, il existe une fonction de potentiel qui génère ces forces. Les forces sont obtenues en calculant le gradient de cette fonction.

Forces non conservatives

Ce sont toutes les forces qui sont appliquées qui ne dérivent pas d'un potentiel. Le travail entre deux points dépend du chemin entre les deux points.

Forces appliquées

Séparation des forces appliquées

$$
\begin{aligned}
F_{x,i} &= F_{x,i}^{\text{pot}} + F_{x,i}^{\text{n.c.}} \\
F_{y,i} &= F_{y,i}^{\text{pot}} + F_{y,i}^{\text{n.c.}} \\
F_{z,i} &= F_{z,i}^{\text{pot}} + F_{z,i}^{\text{n.c.}}
\end{aligned}
$$

Forces issues de potentiels

$F_{x,i}^{\text{pot}}$, $F_{y,i}^{\text{pot}}$, $F_{z,i}^{\text{pot}}$

Forces non conservatives

$F_{x,i}^{\text{n.c.}}$, $F_{y,i}^{\text{n.c.}}$, $F_{z,i}^{\text{n.c.}}$

Forces issues de potentiels

Il existe une fonction $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ telle que...

$$\sum_{i=1}^{N} \left(F_{x,i}^{\text{pot}} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + F_{y,i}^{\text{pot}} \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + F_{z,i}^{\text{pot}} \frac{\partial h_i}{\partial q_r} \right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad \forall r, r = 1, \ldots, n$$

Forces non conservatives

Définition des forces généralisées

$$Q_r = \sum_{i=1}^{N} \left(F_{x,i}^{\text{n.c.}} \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + F_{y,i}^{\text{n.c.}} \frac{\partial g_i}{\partial q_r} + F_{z,i}^{\text{n.c.}} \frac{\partial h_i}{\partial q_r} \right)$$

Formulation des équations de Lagrange

Comme les équations...

$$\sum_{r=1}^{n} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \right] \delta q_r \quad = \quad \sum_{r=1}^{n} \left[\left(-\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r \right) \delta q_r \right]$$

... doivent être satisfaites $\forall \delta q_r,\ r = 1, \ldots, n$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + Q_r \qquad r = 1, \ldots, n$$

Définition du Lagrangien

Définition du Lagrangien

$$\mathcal{L} = T - V$$

Equations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_r} = Q_r \qquad r = 1, \ldots, n$$