

4 décembre 2024

## Complément : Kepler et Forces Centrales

### Démonstration de la forme de la trajectoire

On considère un point matériel soumis à une force gravitationnelle. Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

1. conservation de la quantité de mouvement ;
2. conservation de l'énergie ;
3. la trajectoire est une conique.

On part d'un point matériel avec force gravitationnelle :

$$\mathbf{F} = -G \frac{M m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

**Position et vitesse en coordonnées polaires.** Le rayon vecteur est donné en coordonnées polaires

$$\mathbf{OP} = r \mathbf{e}_r$$

la vitesse s'écrit en utilisant la formule de Poisson

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{OP}} \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \omega \wedge \mathbf{e}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \tag{1}$$

**Energie potentielle.** La force est issue du potentiel

$$V = -G \frac{M m}{r}$$

En effet, le gradient en coordonnées cylindriques est

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

et comme  $V$  ne dépend que de  $r$  on a

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r = -G \frac{M m}{r^2} \mathbf{e}_r$$

qui est bien la force du problème.

**Energie cinétique.** Elle s'écrit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \mathbf{v} \bullet \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \bullet (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Le Lagrangien est ainsi

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + GMm \frac{1}{r}$$

**Equations du mouvement.** On constate que  $\theta$  est cyclique car elle n'apparaît pas dans le Lagrangien. On a deux équations différentielles du mouvement, une selon  $\theta$  et une autre selon  $r$ .

Selon  $\theta$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

et comme  $\theta$  est cyclique on a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (2)$$

Ce qui signifie que la quantité (que l'on note  $L_O$ )

$$m r^2 \dot{\theta} = L_O$$

est une constante du mouvement.

Autrement dit, on a que  $C$  est une constante avec

$$C = r^2 \dot{\theta}$$

C'est la loi des aires. On remarque que  $C dt$  est constant pour un  $dt$  donné et égal au double de l'aire infinitésimale balayée sur une durée  $dt$ . En effet, le double de l'aire d'un triangle infinitésimal construit à partir de  $r$  et de longueur  $r d\theta$ .

$$\frac{1}{2} r r d\theta$$

est l'aire d'un triangle infinitésimal dont le côté est  $r d\theta$  et la hauteur est  $r$ . Ainsi pour un  $dt$  donné, le  $d\theta$  parcouru la surface triangulaire infinitésimale parcourue  $\frac{C}{2} dt$  est constante.

REMARQUE : Calculons directement le moment cinétique

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \mathbf{OP} \wedge (m \mathbf{v}) \\ &= r \mathbf{e}_r \wedge (m (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta)) \\ &= m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_\theta \\ &= m r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

que l'on remarque être égal à

$$\mathbf{L}_O = L_O \mathbf{e}_z \quad (3)$$

dirigé perpendiculairement au mouvement plan décrit par les coordonnées  $r$  et  $\theta$ . La conservation de  $\mathbf{L}_0$  peut également être expliquée par le fait que la force  $\mathbf{F}$  étant radiale elle crée un moment de force nul

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = rG \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \wedge \mathbf{e}_r = 0$$

et le moment cinétique  $\mathbf{L}_O$  est conservé puisque

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O = \mathbf{0}$$

ce qui entraîne  $\mathbf{L}_0$  à demeurer constant. Le vecteur dépend uniquement du plan du mouvement initial et est donc égal à (3) puisque  $\mathbf{e}_z$  est dirigé selon la normale au plan contenant le mouvement initial.

En effectuant

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2 \ddot{\theta} + 2mr \dot{r} \dot{\theta} = 0$$

on obtient la première équation différentielle

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{\theta}\dot{r}}{r} \quad (4)$$

Elle est, entre autre, utile pour la conservation de l'énergie.

Selon  $r$  :

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= m \dot{r} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= -G \frac{Mm}{r^2} + m r \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m \ddot{r} + G \frac{Mm}{r^2} - m r \dot{\theta}^2 = 0 \quad (5)$$

On peut isoler  $\ddot{r}$  pour obtenir

$$\ddot{r} = \frac{-GM + r^3 \dot{\theta}^2}{r^2} \quad (6)$$

**Conservation de l'énergie.** On part de la somme

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - G \frac{Mm}{r}$$

et on dérive une fois

$$\dot{E} = m \dot{r} \ddot{r} + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m r \dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r^2} \dot{r}$$

en utilisant (4) et (6) cela conduit à

$$m \dot{r} \left( \frac{-GM + r^3 \dot{\theta}^2}{r^2} \right) - 2mr \dot{\theta}^2 \dot{r} + m r \dot{\theta}^2 + \frac{GMm}{r^2} \dot{r} = 0 \quad (7)$$

et tous les termes se compensent pour donner 0. L'énergie est donc bien conservée.

**Intégration des équations du mouvement.** On utilise la loi des aires  $C = r^2 \dot{\theta}$  à deux reprises : Premièrement pour éliminer  $\dot{\theta}$  de (5) et, deuxièmement, pour transformer cette équation différentielle par rapport à  $t$  en une nouvelle par rapport à la variable  $\theta$ . L'établissement de l'orbite en est la cause. En effet, l'orbite est la relation explicite entre la distance radiale  $r$  et l'angle  $\theta$ , la distance radiale étant une fonction  $r(\theta)$  à déterminer, et on aimerait montrer que l'orbite est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole).

Ainsi en substituant  $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$  dans (5) et en simplifiant par la masse, on obtient

$$\ddot{r} + G \frac{M}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0 \quad (8)$$

Ensuite on a

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{d}{dt} = \frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

de telle sorte que (8) s'écrive

$$\frac{C}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{C^2}{r^3} = -G \frac{M}{r^2} \quad (9)$$

La prochaine astuce est de constater la relation suivante (primitive en utilisant la dérivée de fonctions composées,  $(f \circ g)' = f'(g(x)) g'(x)$  avec  $f = 1/x$  et  $g = r(x)$  et ensuite  $x = \theta$ )

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right)$$

de telle sorte que (9) devienne

$$-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} = -G \frac{M}{r^2} \quad (10)$$

Finalement on procède par un changement de variable pour faire apparaître un mouvement harmonique forcé. A cette fin,

$$u = \frac{1}{r}$$

et l'équation différentielle (10) devient ainsi

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = G \frac{M}{C^2}$$

que l'on reconnaît être une équation différentielle d'un oscillateur harmonique forcé par une constante. La solution générale est donc la somme de la solution particulière

$$u_p = G \frac{M}{C^2}$$

et de la solution homogène

$$u_h = \hat{u} \cos(\theta - \bar{\theta}) \quad (11)$$

avec  $\hat{u}$  et  $\bar{\theta}$  des constantes d'intégration. En conséquence une fois revenu dans la variable  $r$  au lieu de  $u$  et en choisissant la constante d'intégration  $\bar{\theta} = 0$  (ce qui est possible en admettant des conditions initiales appropriées)

$$\frac{1}{r} = u = u_p + u_h = \frac{GM}{C^2} + \hat{u} \cos \theta$$

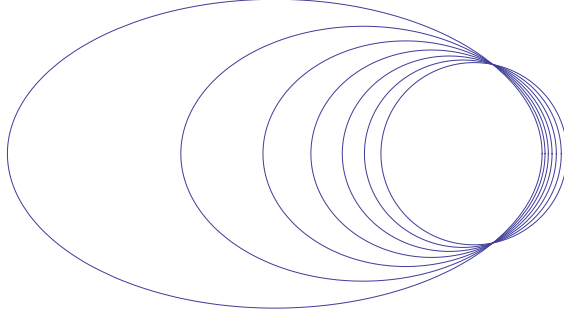


FIGURE 1 – L'excentricité définit la forme de l'ellipse et  $p$  la taille de celle-ci. Plusieurs ellipses sont représentées pour une même valeur de  $p$  et pour une excentricité équidistribuée, à savoir  $e = 0.2, 0.3, \dots, 0.7, 0.8$ .

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{GM}{C^2} \left( 1 + \hat{u} \frac{C^2}{GM} \cos \theta \right) \\ \frac{\frac{C^2}{GM}}{r} &= \left( 1 + \hat{u} \frac{C^2}{GM} \cos \theta \right)\end{aligned}\quad (12)$$

et on constate que l'équation (12) n'est rien d'autre que celle d'une conique

$$\frac{p}{r} = (1 + e \cos \theta) \quad (13)$$

avec le paramètre de la conique  $p$  et l'excentricité  $e$  donnés par

$$\begin{aligned}p &= \frac{C^2}{GM} \\ e &= \hat{u} \frac{C^2}{GM}\end{aligned}$$

**Paramètres de la conique.** Dans le cas d'une ellipse, l'excentricité  $e$  est comprise entre 0 et 1. Avec  $e = 0$  l'ellipse devient un cercle ( $r$  constant en fonction de  $\theta$ , plus de dépendance en  $\theta$  et le paramètre  $p$  est le rayon du cercle) et pour la valeur  $e = 1$ , l'ellipse devient une parabole. Au delà de 1, on obtient une équation paramétrique de l'hyperbole avec ses deux branches.

Pour tracer les ellipses, on part de l'expression des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

et on exprime  $r$  en utilisant l'équation (13) qui donne

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

et ainsi

$$x = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \cos \theta \quad (14)$$

$$y = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \sin \theta \quad (15)$$

et on fait varier  $\theta$  de  $-\pi$  à  $\pi$  dans le cas de l'ellipse. Pour le cas de l'hyperbole, les coordonnées  $x$  et  $y$  iront à l'infini (car  $e > 1$ ) pour au moins une valeur de l'angle  $\theta$  compris entre 0 et  $\pi$  à partir duquel on pourra déterminer une des asymptotes.

Le paramètre  $p$  se lit directement comme la distance verticale entre le foyer et l'ellipse. En effet lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$  le vecteur  $x\hat{x} + y\hat{y}$  est vertical en utilisant (14) et (15) et égal à  $p\hat{y}$  avec un repère  $(O, \hat{x}, \hat{y})$  orthonormé lié au foyer  $O$ .

Le paramètre  $p$  de la conique donne un facteur d'échelle de la figure et  $e$ , l'excentricité décide de la forme de la conique.

En prenant comme cas particulier  $\theta = 0$ , la formule (13) donne

$$\frac{p}{r_{\text{périgée}}} = (1 + e)$$

ce qui conduit à la distance entre le foyer et le périgée (noté  $r_{\text{périgée}}$ ) de

$$r_{\text{périgée}} = \frac{p}{1 + e} \quad (16)$$

L'excentricité est également le rapport entre la distance du foyer au point  $P$  sur la courbe par la distance entre le point de la courbe  $P$  et le point d'intersection  $Q$  d'une perpendiculaire à la directrice  $\Delta$  abaissée depuis  $P$

$$e = \frac{\|OP\|}{\|PQ\|} = d - r_{\text{périgée}}$$

Ainsi pour  $\theta = 0$  on a également

$$\begin{aligned} \|PQ\| &= d - r_{\text{périgée}} \cos(0) = d - r_{\text{périgée}} \\ e &= \frac{r_{\text{périgée}}}{d - r_{\text{périgée}}} \end{aligned} \quad (17)$$

qui peut se mettre sous la forme

$$ed = r_{\text{périgée}} + er_{\text{périgée}}$$

avec  $d$  la distance entre le foyer  $O$  et la directrice  $\Delta$  et en tenant compte de (16)

$$ed = p$$

## Potentiel effectif

### Constantes (intégrales) du mouvement

Nous avons montré que le système d'un point matériel sous l'effet d'un potentiel  $V = -GmM \frac{1}{r}$  conserve

— le moment cinétique ou, ce qui revient au même, la loi des aires

$$r^2 \dot{\theta} = C$$

— l'énergie complète

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - GmM \frac{1}{r}$$

Ce sont les deux intégrales ou constantes du mouvement. Ceci signifie que, bien que le point matériel se déplace et accélère avec une vitesse jamais constante, les deux expressions donnant  $C$  et  $E$  sont constantes tout au long du mouvement. Ces constantes dépendent uniquement des conditions initiales  $\theta(0)$ ,  $\dot{\theta}(0)$ ,  $r(0)$ ,  $\dot{r}(0)$ .

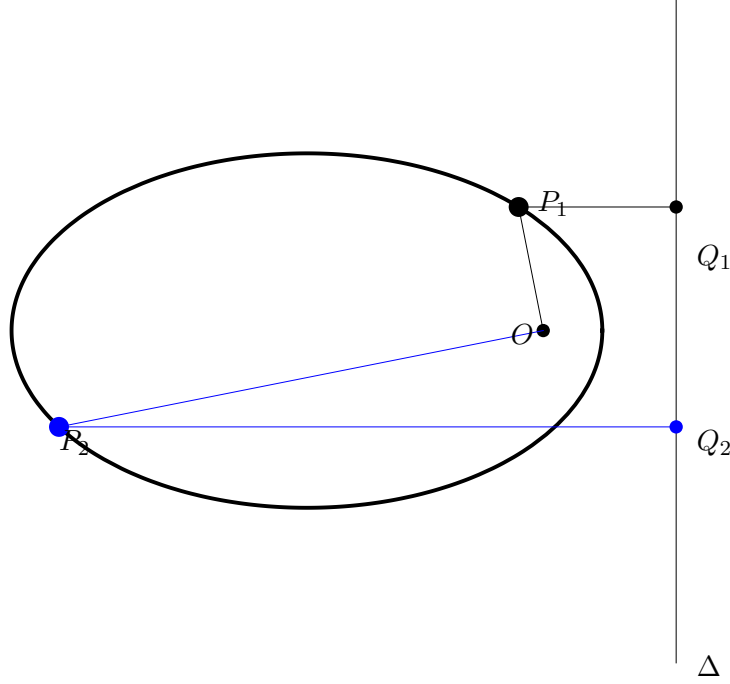


FIGURE 2 – Directrice  $\Delta$ , foyer  $O$ ,  $P_1$  et  $P_2$  sont des points arbitraires de l'ellipse, et  $Q_1$  et  $Q_2$  sont les points d'intersection entre la perpendiculaire à la directrice et les points respectifs  $P_1$  et  $P_2$ . L'excentricité  $e$  est alors définie comme  $\frac{\|OP\|}{\|PQ\|}$  et on a  $\frac{\|OP_1\|}{\|P_1Q_1\|} = e = \frac{\|OP_2\|}{\|P_2Q_2\|}$ .

### Système à un degré de liberté avec la même énergie

En utilisant la loi des aires pour exprimer la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de la constante  $C$

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

il est possible de remplacer la variable  $\dot{\theta}$  par une expression de  $r$  dans la fonction d'énergie  $E$  ce qui donne

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mC^2\frac{1}{r^2} - GmM\frac{1}{r} \quad (18)$$

On remarque alors que cette fonction d'énergie ne dépend que de  $r$  et de  $\dot{r}$ . Il est donc possible d'introduire un système conservatif ayant un seul degré de liberté et possédant la même intégrale du mouvement, la quantité  $E$ . Pour y arriver il suffit de définir la fonction de potentiel associée, appelée potentiel effectif

$$V_{\text{eff}} = m\frac{1}{2}C^2\frac{1}{r^2} - GmM\frac{1}{r}$$

### Représentation graphique du potentiel effectif et interprétation

Analysons le potentiel effectif

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - GmM\frac{1}{r}$$

### Asymptotes

Nous avons deux asymptotes. Une asymptote verticale en  $r = 0$  avec comme valeur limite  $+\infty$  et une asymptote horizontale avec la valeur 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

### Passage par zéro

La fonction passe par zéro pour une valeur de  $r$  égale à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mC^2\frac{1}{r^2} - GmM\frac{1}{r} &= 0 \\ \frac{1}{2}C^2 - GM r &= 0 \\ r &= \frac{C^2}{2GM}\end{aligned}$$

### Valeur extrême

La dérivée s'annule pour la valeur de  $r$  suivante

$$\begin{aligned}\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} &= 0 \\ -mC^2\frac{1}{r^3} + GmM\frac{1}{r^2} &= 0 \\ -C^2 + GM r &= 0 \\ r &= \frac{C^2}{GM}\end{aligned}$$

La valeur associée est négative

$$\begin{aligned}V_{\text{eff}}\left(r = \frac{C^2}{GM}\right) &= \frac{1}{2}m\frac{C^2G^2M^2}{C^4} - GmM\frac{GM}{C^2} \\ &= -\frac{G^2mM^2}{2C^2} < 0\end{aligned}$$

### Graphique

Connaissant les asymptotes, la valeur pour laquelle la fonction passe par zéro et la valeur extrême (qui est un minimum) nous avons la représentation graphique donnée à la figure 3.

### Discussion sur la forme de la trajectoire résultante

L'énergie du système complet  $E$  (à deux degrés de liberté) est égale à  $V_{\text{eff}}$  uniquement lorsque  $\dot{r} = 0$ . Ceci a lieu lorsque le point matériel est soit le plus éloigné du foyer (ellipse) soit lorsqu'il est le plus proche du foyer (hyperbole, parabole, ellipse).

### Hyperbole

Lorsque

$$V_{\text{eff}} > 0$$

il y a une seule valeur réelle pour  $r$  qui donne la valeur  $V_{\text{eff}}$  correspondante. On constate ceci en examinant la figure 3.



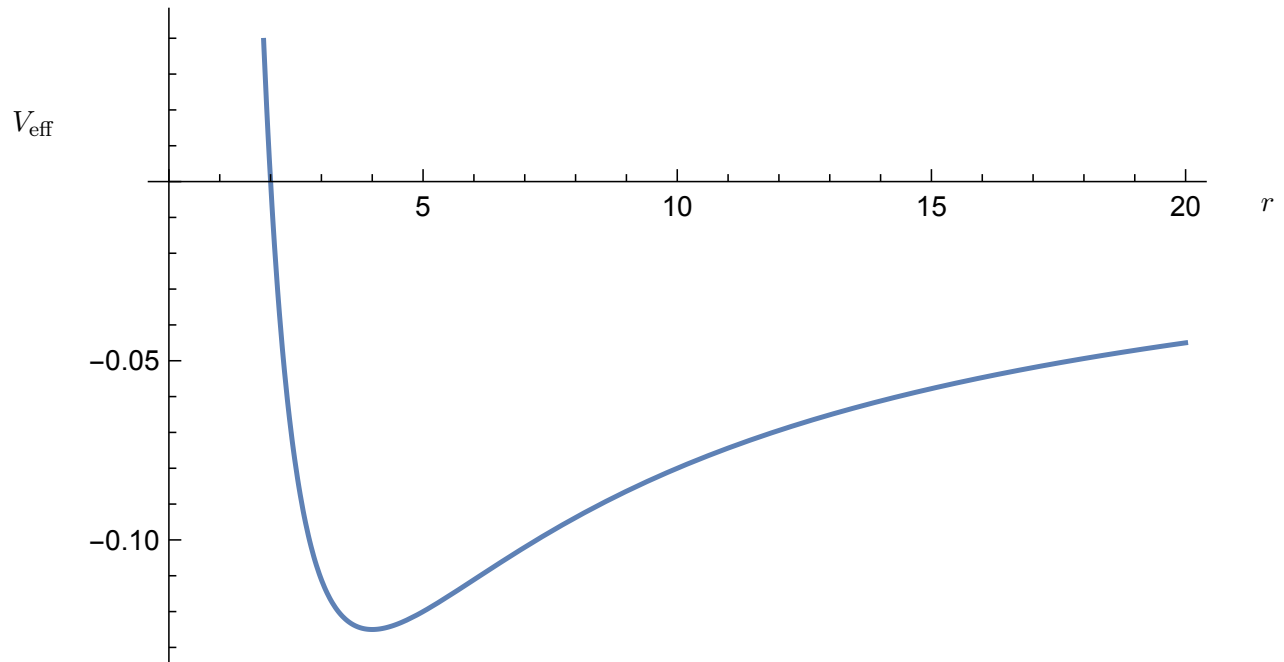


FIGURE 3 – Représentation graphique du potentiel effectif. C’est le potentiel d’un système à un degré de liberté qui conserve la fonction d’énergie du système à deux degrés de liberté. (Graphique obtenu pour des paramètres normalisés  $G = m = M$  et  $C = 2$ .)

## Parabole

Lorsque

$$V_{\text{eff}} = 0$$

nous avons calculé

$$r = \frac{C^2}{2GM}$$

c’est la distance la plus proche du foyer sur la trajectoire sous forme de parabole.

## Ellipse

Lorsque

$$V_{\text{eff}} < 0$$

deux solutions de  $r$  apparaissent. Celle la plus petite correspond à la périégée, notée  $r_{\text{périégée}}$  et celle la plus grande notée  $r_{\text{apogée}}$ .

## Cercle

La trajectoire circulaire apparaît lorsque le potentiel effectif est à sa valeur extrême, au minimum. Le rayon du cercle vaut donc

$$r = \frac{C^2}{GM}$$