

23 septembre 2024

Indications Série 1 : Vecteurs - Cinématique

1. Vecteurs

1.

$$\begin{aligned}\|\mathbf{OA}\|^2 &= \mathbf{OA} \bullet \mathbf{OA} = \\ \|\mathbf{OA}\| &= \end{aligned}$$

de manière similaire

$$\mathbf{OB} =$$

ensuite avec $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \dots$ et $\mathbf{OA} + \mathbf{OB} = \dots$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{AB}\| &= \dots \\ \|\mathbf{OA} + \mathbf{OB}\| &= \dots\end{aligned}$$

2. L'angle AOB . On utilise la relation avec le produit scalaire $\mathbf{OA} \bullet \mathbf{OB} = \|\mathbf{OA}\| \|\mathbf{OB}\| \cos(AOB)$ et donc ...
3. La projection orthogonale de $\mathbf{AB}$ sur $\mathbf{OA}$ est obtenue en définissant un point C de telle sorte que $\mathbf{CB}$ soit perpendiculaire à $\mathbf{OA}$. On peut utiliser le produit scalaire pour cela. Soit $\mathbf{OC} = \gamma \mathbf{OA}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$ à déterminer.

$$\begin{aligned}\mathbf{OA} \bullet (\mathbf{OB} - \mathbf{OC}) &= 0 \\ \mathbf{OA} \bullet \mathbf{OB} - \mathbf{OA} \bullet (\gamma \mathbf{OA}) &= 0\end{aligned}$$

Le vecteur obtenu $\mathbf{OC}$ est la somme du vecteur $\mathbf{OA}$ et de la partie projetée de $\mathbf{AB}$ sur la droite OA . En conséquence on obtient la partie du vecteur $\mathbf{AB}$ dans la direction OA en effectuant la soustraction

$$\mathbf{OC} - \mathbf{OA} = \dots$$

ce qui donne la réponse au problème.

Une autre technique consiste à construire un vecteur de longueur 1 dans le sens de $\mathbf{OA}$ et de prendre le produit scalaire entre $\mathbf{AB}$ et celui-ci. Le scalaire obtenu donne la longueur du vecteur que l'on cherche. Le vecteur est alors obtenu en multipliant ce nombre par le vecteur unité construit. Autrement dit, ...

4. L'aire du triangle OAB est obtenu en constatant que c'est la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\mathbf{OA}$ et $\mathbf{OB}$. En conséquence c'est la moitié du module du produit vectoriel $\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB}$. Autrement dit

$$\text{Aire } AOB = \frac{1}{2} \|\dots \wedge \dots\|$$

2. Points coplanaires

Les quatre points A , B , C et D sont coplanaires si et seulement si les quatre vecteurs $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{AD}$ appartiennent au même plan (ces vecteurs sont alors dits être linéairement dépendants). Autrement dit, si le volume du parallélépipède, dont un des sommet est A et les trois sommets adjacents sont B , C et D , est nul alors les quatre points sont coplanaires. Ainsi, il faut vérifier que le déterminant, construit à partir des coordonnées des vecteurs $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ et $\mathbf{AD}$, soit nul. Continuer à partir de là ...

3. Produit triple

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \hat{x} & -1 & 1 \\ \hat{y} & 0 & 1 \\ \hat{z} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots$$

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \dots$$

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) = \dots$$

$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) = \dots$$

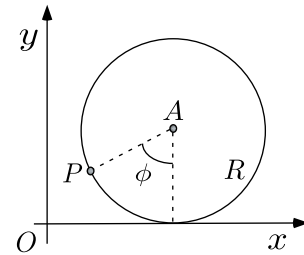
$$(\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) \mathbf{c} = \dots$$

4. Repère qui change d'orientation au cours du temps

1. Utiliser la propriété du repère droit d'être perpendiculaire. Que vaut le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires ?
2. Donner la norme au carré de chaque vecteur du repère en utilisant le produit scalaire.
3. Dériver les relations obtenues par rapport au temps et utiliser la règle de Leibniz. Il faut considérer le repère comme non immobile et donc la dérivée par rapport au temps de chacun des vecteur de base comme non nécessairement nulle.
4. Introduire le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ et faire apparaître un produit mixte.

5. Point sur roue

1. Introduire les coordonnées x_A et y_A du point A et considérer ces coordonnées comme des fonction de l'angle ϕ .
2. Déterminer les expressions de x_A et y_A en fonction de R et ϕ . Comme le système roule sans glisser, la distance autour du périmètre décrit par l'angle ϕ donne la distance horizontale (imaginer un fil qui se déroule au fur et à mesure que la roue avance, le fil donnant la distance x_A . Utiliser la propriété que l'angle ϕ est exprimé en radians.
3. Utiliser la trigonométrie $\cos(\phi)$ et $\sin(\phi)$ pour exprimer les coordonnées de P , point situé à la périphérie de la roue, et exprimer $\mathbf{OP}$ en utilisant $\mathbf{AP}$ et $\mathbf{OA}$ pour exprimer $\mathbf{OP}$ en utilisant R , ϕ , $\sin(\phi)$, $\cos(\phi)$.
4. Dériver x_P et y_P par rapport à ϕ et regarder ce qui se passe lorsque le point P est en contact avec le sol.



6. Bielle et Piston

1. Exprimer les coordonnées de $\mathbf{OA}$ et $\mathbf{OB}$ en utilisant R , $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et x_b .
2. Utiliser les relations $\mathbf{OC} = \mathbf{OA} + \mathbf{AC}$ et $\mathbf{AC} = \frac{d}{L}\mathbf{AB}$. Exprimer $\mathbf{OC}$ à l'aide de R , d , L , x_b , $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$.
3. Calculer $\|\mathbf{AB}\|$ et $\|\mathbf{AB}\|^2$. Utiliser le résultat obtenu pour exprimer x_2 en fonction de R , $\cos(\theta)$, L^2 .
4. Calculer $\dot{\mathbf{OC}} = \frac{d}{dt}\mathbf{OC} = \mathbf{OC}'$ — la dérivée par rapport au temps — en utilisant la dérivée de fonctions composées. Il faut considérer θ comme une fonction du temps $\theta(t)$.