Exercices préparatoires à la série 7

Corps Solide

1. Rotations successives

Un cube dont le centre est situé sur l'origine O du repére $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ et dont trois des faces ont des normales alignées avec le repère, subit deux rotations successives. La première d'axe $\hat{\boldsymbol{x}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ est suivie d'une seconde rotation d'axe $\hat{\boldsymbol{y}}'$ (image de l'axe $\hat{\boldsymbol{y}}$ par la première rotation) et de même angle $\frac{\pi}{4}$. On demande de trouver l'axe de rotation et l'angle d'une rotation unique qui amène le cube de la position initiale vers la position obtenue après les deux rotations successives.

INDICATIONS :

— Attacher un repère au cube. Tourner le cube revient à tourner les points du repère.

— Pour faciliter les calculs, prendre les matrices de rotation des repères en laissant les points fixes. L'avantage est que les $\hat{\boldsymbol{n}}$ sont toujours simples avec au moins deux 0 comme composantes. Si on prend les matrices de rotation faisant tourner le cube en laissant le repère fixe le vecteur $\hat{\boldsymbol{y}}'$ issu de la première rotation aura au moins deux composantes nulles et en faisant $\hat{\boldsymbol{n}} \triangleq \hat{\boldsymbol{y}}'$ la matrice qui fait tourner le point sera compliquée. Une fois la matrice finale obtenue, la matrice qui fera tourner le cube sera la transposée du produit des matrices que l'on aura calculé avec les matrices qui tournent les repères. En effet la matrice qui fait tourner un objet est toujours l'inverse (donc la transposée) de la matrice qui fait tourner les repères.

— Utiliser la formule du cours pour une matrice de rotation d'angle θ et d'axe généré par le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{n}}$ (ATTENTION : cette formule donne la matrice de rotation en gardant le repère fixe et en bougeant les points).

$$\cos(\theta)\, \boldsymbol{I} + (1 - \cos\theta))\, \hat{\boldsymbol{n}}\hat{\boldsymbol{n}}^T + \sin\theta\, [\hat{\boldsymbol{n}} \wedge]$$

et obtenir les deux matrices R_1 et R_2 des deux rotations successives.

— Effectuer le produit matriciel

$$R = R_2\, R_1$$

— Calculer

$$\frac{R - R^T}{2}$$

2. Pendule constitué de plusieurs points matériels

Soit un pendule constitué de quatre point matériels de masse identique m rigidement reliés les uns aux autres par un fil rigide. Ils sont équidistants les uns des autres d'une distance d et situés sur la même droite. La longueur entre les deux points matériels les plus distants est ainsi $l = 3\,d$.

L'axe du pendule passe par la premier point matériel dont la position est le point O fixe. La gravité agit sur le pendule et l'axe est perpendiculaire à la gravité.

1. Dessiner un schéma.
2. Exprimer la position $\boldsymbol{OP_i}$ de chaque point matériel, $i = 1, 2, 3, 4$ à l'aide de l'angle θ défini en prenant $\hat{\boldsymbol{x}}$ le vecteur du repère horizontal comme référence pour l'angle nul.
3. Exprimer la vitesse $\boldsymbol{v_i}$ de chaque point matériel en dérivant les expressions obtenues au point 2.
4. Déterminer la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega_i}$ de chaque point en utilisant la formule

$$\boldsymbol{v_i} = \boldsymbol{\omega_i} \wedge \boldsymbol{OP_i}$$

   sachant que $\boldsymbol{\omega_i} = \omega_i\,\hat{\boldsymbol{z}}$ avec $\hat{\boldsymbol{z}}$ dirigé le long de l'axe de rotation. Que constatez-vous pour les $\boldsymbol{\omega}_i$?
5. Calculer le moment cinétique

$$\boldsymbol{L_O} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{OP_i} \wedge (m\boldsymbol{v_i})$$

   et exprimer cette quantité en fonction des $\boldsymbol{\omega_i}$ et utiliser la particularité qui lie les $\boldsymbol{\omega_i}$ entre eux.
6. Calculer le moment de force

$$\boldsymbol{M_O} = \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{OP_i} \wedge \boldsymbol{F}_i$$

   sachant que les forces de liaison du fil sont alignées avec le fil et que $\boldsymbol{F}_i$ représente la résultante des forces qui agit sur le point matériel P_i.
7. Ecrire les équations différentielles du mouvement en utilisant la loi

$$\frac{d\boldsymbol{L_O}}{dt} = \boldsymbol{M_O}$$

8. Déterminer la longueur d'un pendule simple (un seul point matériel) qui serait synchrone avec le pendule composé si les conditions initiales étaient identiques.

3. Inertie d'une barre

Calculer l'inertie d'une barre homogène de longueur l et de masse m pour un axe situé à l'extrémité de la barre. Répéter ce calcul mais pour un axe de rotation situé au centre de masse. Quel est le lien entre les deux quantités que vous venez de calculer ? INDICATION : Utiliser la formule

$$I = \rho \int r^2 \, dr$$

où ρ est la densité linéique. Choisir les bornes d'intégration afin d'obtenir la bonne inertie dans chaque cas.

4. Demi-cylindre qui roule sans glisser

Un demi-cylindre repose sur le plan de telle sorte qu'il puisse rouler sans glisser sur celui-ci. On demande d'établir la *liaison cinématique* du centre de gravité (i.e. exprimer celui-ci en fonction de l'angle θ que forme le plan de coupe du cylindre avec le plan horizontal).