Exercices complémentaires à la série 6

Série 6 : Rotations

1. Matrices de rotations

Maîtriser l'utilisation des matrices de rotations s'avère très utile pour le calcul des réactions dans les directions ($\mathbf{e_r},\ \mathbf{e_\phi},\ \mathbf{e_z}$) dans un repère cylindrique et dans les directions ($\mathbf{e_\theta},\ \mathbf{e_\phi},\ \mathbf{e_r}$) dans un repère sphérique. Pour déterminer la résultante d'une force $\mathbf{F}$ exprimée dans un premier repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ dans un nouveau repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}', \hat{\boldsymbol{y}}', \hat{\boldsymbol{z}}')$, on pose :

$$\mathbf{F}' = R \cdot \mathbf{F}$$

On demande alors de déterminer l'expression de la force $\mathbf{F}$ dans les nouveaux repères.

Indication : Utiliser les matrices de rotations suivantes (le repère tourne et on exprime les relations entre les coordonnées avant et après rotation du repère) :
Rotation d'axe z et d'angle θ

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation d'axe y et d'angle θ

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Rotation d'axe z et d'angle ϕ

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

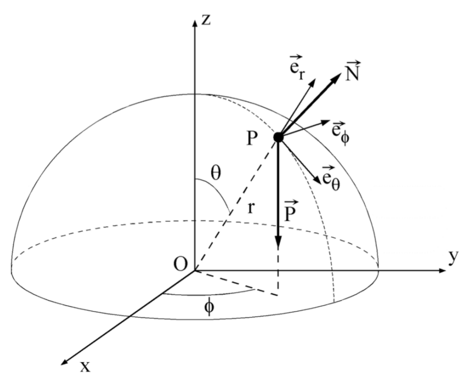
En ce qui concerne la transformation en coordonnées cylindriques seule R_3 est nécessaire. Utiliser par contre R_2 et R_3 pour les coordonnées sphériques.

1. Exprimer par un examen graphique les vecteurs du repère ($\mathbf{e_r},\ \mathbf{e_\phi},\ \mathbf{e_z}$) à partir des vecteurs $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{e_z}$.
2. Exprimer la relation entre un vecteur exprimé dans la base ($\mathbf{e_r},\ \mathbf{e_\phi},\ \mathbf{e_z}$) et un vecteur exprimé dans la base cartésienne fixe ($\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{y}},\ \hat{\boldsymbol{z}}$) et en utilisant la matrice de rotation R_1.

3. En ce qui concerne les coordonnées sphériques ($\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_\mathbf{r}$) (cf. figure), exprimer les vecteurs ($\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_\mathbf{r}$) à partir de $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$ uniquement en examinant la figure et en utilisant des projections trigonométriques.
4. Déterminer la relation entre un vecteur exprimé dans la base sphérique ($\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_\mathbf{r}$) en fonction de ce même vecteur mais exprimé dans la base cartésienne fixe ($\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{y}},\ \hat{\boldsymbol{z}}$) en utilisant deux rotations successives avec les matrices R_2 et R_3. Est-ce que l'ordre des opérations est importante ?

2. Point matériel captif sur une sphère

Un corps pesant de masse m est posé au sommet d'une demi-sphère de rayon R. Il glisse sans frottement en restant en permanence en contact avec la sphère.



a. Sachant que les 2 forces agissant sur la masse m sont le poid $\mathbf{P}$ et la réaction $\mathbf{N}$, les exprimer dans le repère ($\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_\mathbf{r}$) .
b. Établir les équations du mouvements : un système de 3 équations dans les directions ($\mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\phi,\ \mathbf{e}_\mathbf{r}$) . Rappel :

$$\sum \mathbf{F}_{\mathbf{ext}} = m\mathbf{a}$$

c. Démontrer que la quantité scalaire

$$m\,R^2\,\dot{\phi}\,\sin^2\theta$$

reste constante tout au long du mouvement lorsque le point matériel est en contact avec la sphère. Ce genre de quantités appelées *constantes du mouvements* ou *intégrales du mouvements* sont très importantes et permettent dans certains cas de déterminer la trajectoire. Une intégrale du mouvement permet de réduire l'ordre des équations différentielles décrivant le système.