Exercice et corrigé

Cinématique d'un disque inscrit dans un cercle (spirographe)

Enoncé

Un disque de rayon r se déplace de telle sorte à être en permanence inscrit dans un cercle de rayon R. Le disque touche le cercle au point B. Le cas de $R = 2r$ est considéré. On considère deux points en particulier, le centre du disque P et un point arbitraire du disque A. Un repère immobile $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ est fixé au centre du cercle O. On introduit également deux angles pour repérer le disque, l'angle α que forme le vecteur $\mathbf{OP}$ avec le vecteur $\hat{\mathbf{x}}$ du repère et l'angle β du disque (par rapport à la droite OP).

1. Décrire la position du vecteur $\mathbf{OA}$ en fonction des deux angles α et β. A cette fin, introduire le paramètre $l = \|\mathbf{AP}\|$.
2. Déterminer la relation entre les vitesses angulaires $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ pour que le disque ne glisse pas au point de contact avec le cercle.
3. En utilisant la condition du point 2., déterminer la trajectoire que décrit A lorsque $\dot{\alpha}$ est constant.
4. Que se passe-t-il lorsque $l = r$, c.-à-d. lorsque le point A est situé sur la périphérie du disque ?

Solution

$$
\begin{aligned}
\mathbf{OA} &= \mathbf{OP} + \mathbf{PA} \\
\mathbf{PA} &= l\cos(\alpha+\beta)\hat{\mathbf{x}} + l\sin(\alpha+\beta)\hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{OP} &= r\cos\alpha\hat{\mathbf{x}} + r\sin\alpha\hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{OA} &= (r\cos\alpha + l\cos(\alpha+\beta))\hat{\mathbf{x}} + (r\sin\alpha + l\sin(\alpha+\beta))\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}
$$

Si le vecteur $\mathbf{OP}$ parcourt α en une seconde, alors la petite roue tourne d'un angle deux fois plus grand, mais dans le sens contraire, ainsi $\beta = -2\alpha$. Ceci se justifie car la distance déroulée, donnée par le rayon du disque multiplié par l'angle décrit, doit être identique à la distance parcourue sur le cercle, également donnée par le rayon du cercle que multiplie l'angle associé. En conséquence, les vitesses angulaires doivent respecter la relation

$$\dot{\beta} = -2\dot{\alpha} \tag{1}$$

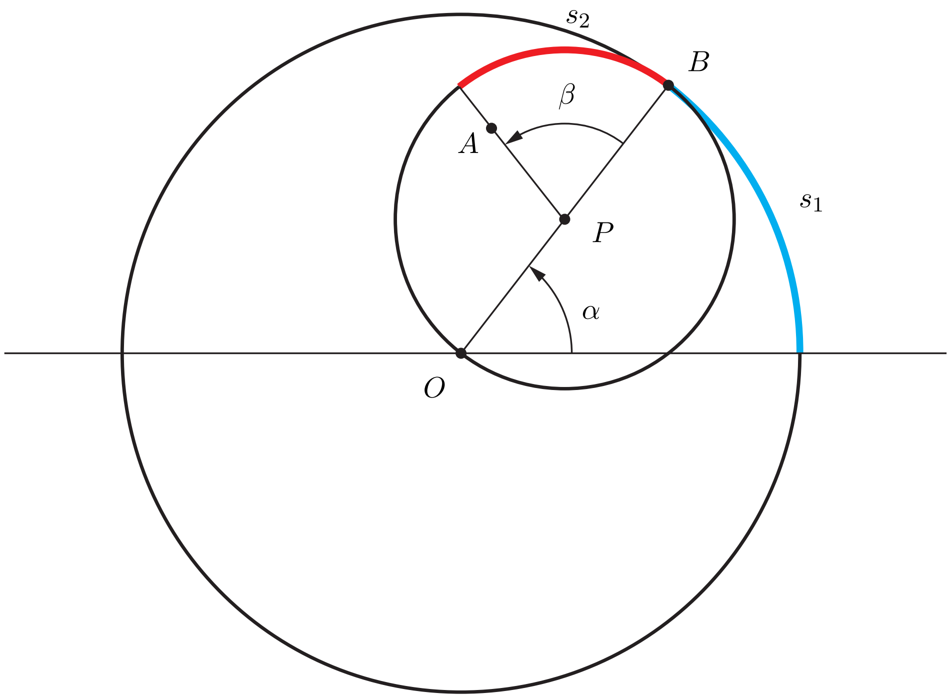

FIGURE 1: Un disque se déplace de telle sorte à toujours être en contact avec un cercle. L'angle α décrit le point de contact et l'angle β donne l'angle de repérage d'un point A par rapport à la droite reliant l'origine O au point de contact B. Le centre du disque est au point P.

pour que le disque ne glisse pas par rapport au cercle. De manière réciproque, cette relation (1) sur les vitesses angulaires s'intègre (on appelle celà une contrainte holonome) et on obtient qu'à chaque instant

$$\beta = -2\alpha$$

Cette relation permet de simplifier quelque peu la cinématique

$$\begin{aligned}
\mathbf{OA} &= (r\cos\alpha + l\cos(\alpha - 2\alpha))\hat{\mathbf{x}} + (r\sin\alpha + l\sin(\alpha - 2\alpha))\hat{\mathbf{y}} \\
&= (r\cos\alpha + l\cos(-\alpha))\hat{\mathbf{x}} + (r\sin\alpha + l\sin(-\alpha))\hat{\mathbf{y}} \\
&= (r\cos\alpha + l\cos\alpha)\hat{\mathbf{x}} + (r\sin\alpha - l\sin(\alpha))\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Lorsque $l = r$ on a

$$\mathbf{OA} = 2r\cos\alpha\hat{\mathbf{x}}$$

et on obtient un mouvement purement horizontal. Un dispositif basé sur ce principe permet à une roue dentée (forçant le roulement sans glissement) de transformer un mouvement rotatoire en un mouvement de translation. A l'inverse, en déplaçant un ergot de manière horizontale et le pignon (disque) lié à l'ergot permet de transformer le mouvement de translation en un mouvement de rotation du centre du disque.

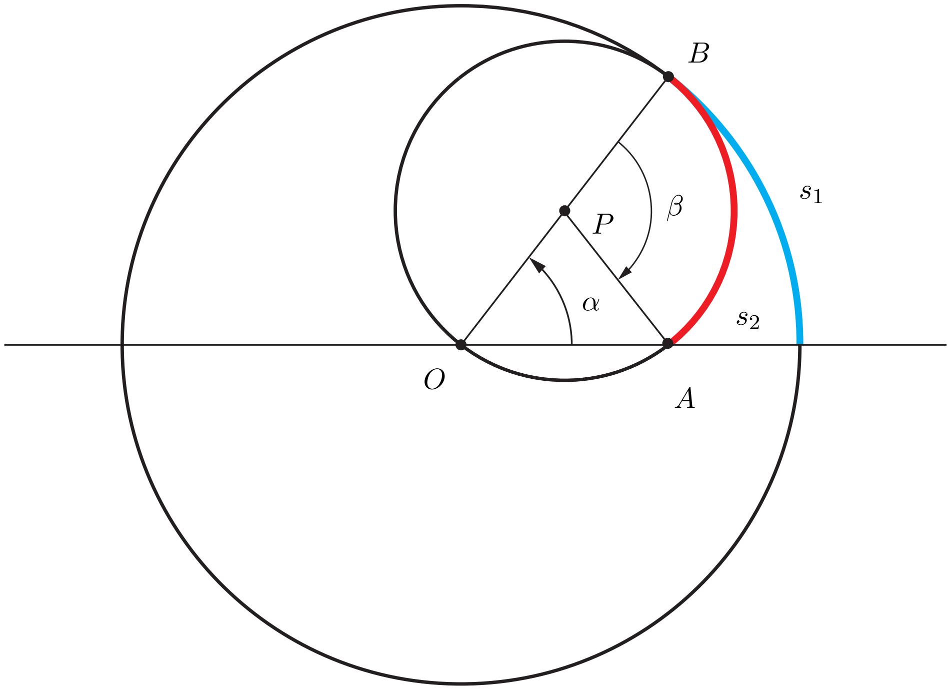

FIGURE 2: La condition de roulement sans glissement impose que la distance déroulée s_1 du point de contact B par rapport à son point de départ soit identique à la distance déroulée du disque s_2 (due au déplacement angulaire β).

Variante

Une variante consiste à ne pas imposer $R = 2r$. On obtient de jolis dessins. La condition de roulement sans glissement devient

$$\beta = -\frac{R}{r}\,\alpha$$

où R désigne le rayon du cercle et r le rayon du disque. La longueur $\|AP\| = l$ est une variables supplémentaire. Dans les vieux spirographes manuels, il y a un trou dans la roue dentée ($\equiv$ disque dans notre cas) à cette distance l pour y placer un stylo. L'équation générale s'écrit alors sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{OA} \quad = \quad & \left[(R-r)\cos\alpha + l\cos\left(\alpha - \frac{R}{r}\alpha\right)\right]\hat{\mathbf{x}} \\ & + \left[(R-r)\sin\alpha + l\sin\left(\alpha - \frac{R}{r}\alpha\right)\right]\hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Une autre variante consiste à faire rouler le disque sur le cercle de manière circonscrite et non inscrite comme dans l'exercice.

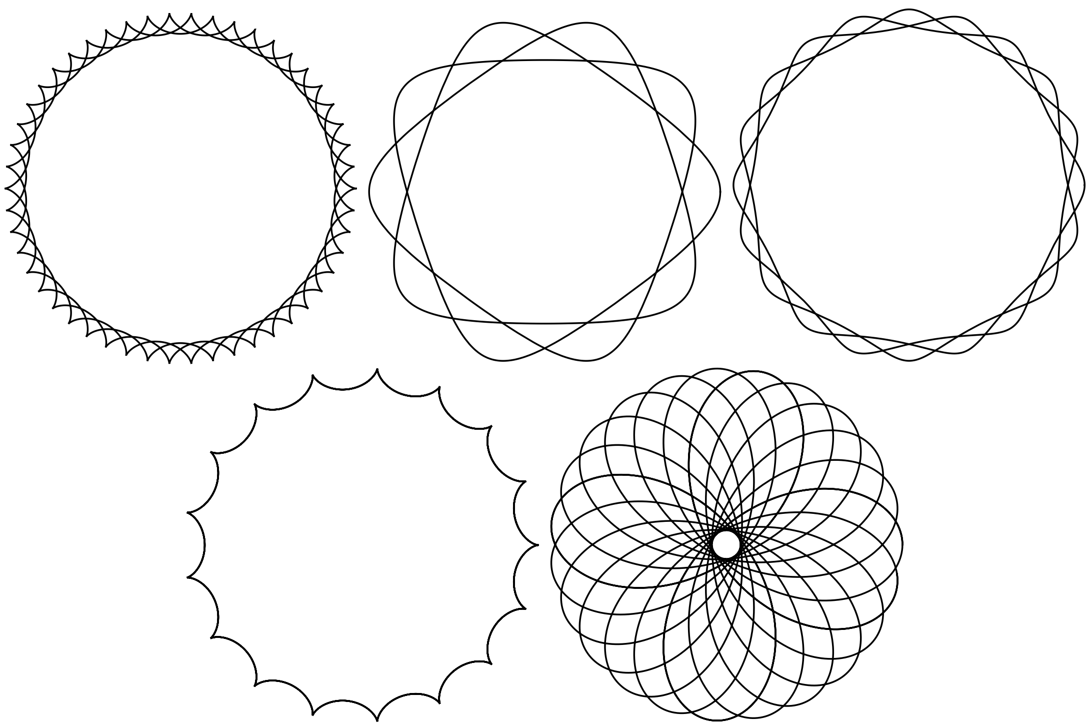

FIGURE 3: Les cas de (i) $r = 0.3$, $R = 5$, $l = 0.3$; (ii) $r = 0.3$, $R = 1$, $l = 0.1$; (iii) $r = 0.3$, $R = 2$, $l = 0.1$; (iv) $r = 1$, $R = 17$, $l = 1$; (v) $r = 1$, $R = \frac{23}{17}$, $l = 0.3$ sont illustrés. Le cas de l'exercice est $r = 1$, $R = 2$ et $l = 1$.