

20 novembre 2024

Complément : Glissière Hémisphérique

Enoncé : Un demi-cercle tourne autour de l'axe vertical à vitesse constante ω . Un point matériel est assujéti à demeurer en permanence en contact avec le demi-cercle tout en se déplaçant le long de celui-ci. On repère le point matériel à l'aide de l'angle θ . On demande l'équation différentielle du mouvement en θ .

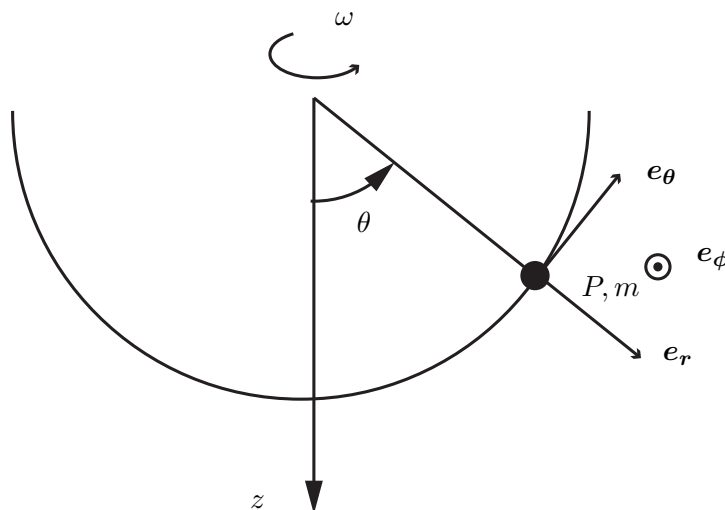


FIGURE 1 – Une glissière hémisphérique contraint un point matériel à demeurer en permanence en contact tout en le laissant glisser à sa guise le long de la glissière. La glissière est entraînée en rotation uniforme avec la vitesse angulaire Ω . La pseudo-force centrifuge va créer un point d'équilibre différent de la position au repos au fond de la glissière.

Méthode de Lagrange

Comme la vitesse de rotation $\dot{\phi} = -\Omega$ est maintenue constante, le point matériel se déplace uniquement le long de l'arc de cercle. On utilise l'angle θ pour décrire la position du point matériel. Cette coordonnée est libre et il n'y a pas d'autre possibilité de changer la configuration du système mécanique que de modifier θ . Le système possède un seul degré de liberté.

Une autre façon de calculer le degré de liberté est d'avoir recours aux coordonnées sphériques r , ϕ et θ pour le positionnement du point P . On introduit la contrainte $\dot{\phi} = \omega$ qui élimine la possibilité de bouger indépendamment la coordonnée ϕ car cette contrainte s'intègre et donne

$$\phi = \omega t + \phi(0)$$

Comme le rayon est maintenu constant, il y a une deuxième contrainte qui est $\dot{r} = 0$ qui est également

$$r = r(0)$$

Ainsi, le nombre de coordonnées, 3, moins le nombre de contraintes sur celles-ci, 2, donne le degré de liberté qui est 1.

Les coordonnées sphériques permettent également d'exprimer la vitesse de translation instantanée du point P .

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} = r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

(En effet, la valeur de r est constante, i.e. $\dot{r} = 0$.)

Si on a oublié les formules de la vitesse en coordonnées sphériques, il est aisé de les retrouver. On a successivement

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

avec

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{z}} + \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_r + \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{e}_r &= -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \wedge \mathbf{e}_r + \dot{\theta} \mathbf{e}_\phi \wedge \mathbf{e}_r \\ &= \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi + \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

et ainsi

$$\dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi + r\dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

en toute généralité, et donc (1) en particulier car dans notre cas r est constant et donc $\dot{r} = 0$.

Energie cinétique : Le point matériel possède à chaque instant de l'énergie cinétique de translation due à sa masse et sa vitesse instantanée. Il n'y a pas d'énergie cinétique de rotation étant donné que le point matériel ne possède pas d'inertie.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} \bullet \dot{\mathbf{O}}\mathbf{P} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle :

$$V = m g h = m g (r - r \cos \theta)$$

Equations de Lagrange : Le lagrangien $\mathcal{L}$ est toujours la différence entre l'énergie cinétique et potentielle.

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g (r - r \cos \theta) \quad (2)$$

Une seule coordonnée généralisée est nécessaire qui est choisie comme θ . La vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est constante et égale à $\omega = -\Omega$. Le formalisme de Lagrange conduit directement à l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m r^2 \ddot{\theta} + m g r \sin \theta - m r^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (3)$$

En effet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$$

à cause du deuxième terme de (2) et le premier et le dernier terme donnent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mr^2 \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta$$

ce qui conduit bien à (3). En réarrangeant les termes et en factorisant $\sin \theta$ dans l'expression (3), on retrouve les résultats obtenus avec la méthode de Newton (Exo 6. Série VI) :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{r} - \omega^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$