Exercice

Le singe et la balle

Enoncé

Un singe est suspendu à une branche à une hauteur h. Au temps $t = 0$, il lâche la branche et chute de manière parfaitement verticale et il est uniformément accéléré par l'accélération terrestre. Le lanceur de balle est situé à une distance horizontale L (abscisse) de la position du singe.

HYPOTHESE : Le singe et la balle sont assimilés à des points matériels et il n'y a pas de frottement.

1. Déterminer l'angle de visée du lancé de la balle pour que la balle atteigne le singe.
2. Déterminer la composante horizontale minimum de la vitesse initiale de la balle pour que celle-ci atteigne le singe avant qu'il ne touche le sol.

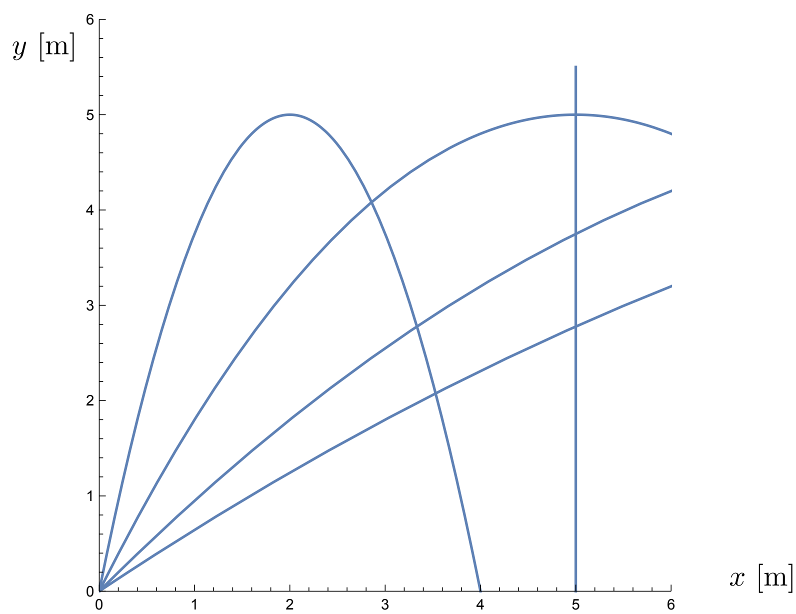

FIGURE 1: Trajectoires de la balle (paraboles) pour différentes conditions initiales et la trajectoire du singe (trait vertical). Comme ce sont des trajectoires, la paramétrisation par le temps n'apparaît pas explicitement. Application numérique : $L = 5$ [m], $h = 5.5$ [m], $g = 10$ [m/s^2].

Solution

Toutes les trajectoires sont planaires et on place un repère $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ centré sur le lanceur de balle.

Dynamique du singe. Soit x_s et y_s les coordonnées du point matériel qui représentent le singe. Elles sont gouvernées par les lois de Newton qui s'écrivent

$$m\ddot{x}_s = 0 \tag{1}$$
$$m\ddot{y}_s = -mg \tag{2}$$

avec les conditions initiales

$$x_s(0) = L \tag{3}$$
$$\dot{x}_s(0) = 0 \tag{4}$$
$$y_s(0) = h \tag{5}$$
$$\dot{y}_s(0) = 0 \tag{6}$$

Dynamique de la balle. La position de la balle est donnée par les deux coordonnées x_b et y_b qui sont soumises aux équations dynamiques issues sdes lois de Newton

$$m\ddot{x}_b = 0 \tag{7}$$
$$m\ddot{y}_b = -mg \tag{8}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x_b(0) &= 0 \\ y_b(0) &= 0 \\ \dot{x}_b(0) &= v_{xb0} \\ \dot{y}_b(0) &= v_{yb0} \end{aligned}$$

et les deux paramètres inconnus du lancé sont les vitesses initiales v_{xb0} et v_{yb0} (respectivement la vitesse initiale horizontale et la vitesse initiale verticale).

Résolution des équations dynamiques. Les équations différentielles s'intègrent (dans ce cas) comme une intégration classique. Appliquons une intégrale, puis une autre, aux deux côtés des équations différentielles. A chaque intégration, il ne faut pas oublier la constante d'intégration. *Il est important d'introduire d'abord les constantes d'intégration et, lorsque l'intégration est terminée, d'exprimer les constantes d'intégration par les conditions initiales.* Le symbole $\int a$ signifie qu'il faut trouver la primitive de a, autrement dit il faut déterminer une quantité b telle que $\frac{d}{dt}b = a$. C'est l'opération 'inverse' de la dérivée. Lorsque plusieurs constantes apparaissent au même niveau (comme C_1 et C_2 ci-dessous), on peut les regrouper dans une constante unique (la constante C).

Résolution des équations de la dynamique du singe :

En ce qui concerne le mouvement horizontal du singe, comme l'accélération est nulle à chaque instant (1) et qu'il se trouve initialement à la distance L et sans vitesse (cf. (3) et (4)), la position x_s du singe demeure constante

$$x_s(t) = L \qquad \forall t \geq 0$$

La position verticale du singe en fonction du temps nécessite la résolution de l'équation différentielle (2) qui devient après simplification de la masse m

$$\begin{aligned} \ddot{y}_s &= -g \\ \int(\ddot{y}_s) &= \int(-g) \\ \dot{y}_s + C_1 &= -g\,t + C_2 \\ \dot{y}_s &= -g\,t + C \qquad (9) \\ \int(\dot{y}_s) &= \int(-g\,t + C) \\ y_s(t) &= -\frac{1}{2}g\,t^2 + Ct + D \qquad (10) \end{aligned}$$

Les conditions initiales (5) et (6) permettent de déterminer les constantes d'intégration. Il faut utiliser (10) en y remplaçant t par 0 et aussi utiliser (9) et y poser $t = 0$.

$$\begin{aligned} y_s(0) = h = D \\ \dot{y}_s(0) = 0 = C \end{aligned}$$

ce qui donne

$$y_s(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + h \qquad (11)$$

Solution de l'équation de la dynamique de la balle :

La solution du mouvement horizontal est du même type que celle du singe, car l'équation (8) est de même nature que (2). On peut donc utiliser une solution analogue avec de nouvelles constantes d'intégration. *On se rend compte ainsi de l'importance d'abord d'introduire les constantes d'intégration et seulement ensuite de les remplacer par les conditions initiales.*

Ainsi,

$$y_b(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + Et + F$$

avec les constantes d'intégration E et F qui sont déterminées par les conditions initiales

$$\begin{aligned} y_b(0) &= 0 = F \\ \dot{y}_b(0) &= v_{by0} = E \end{aligned}$$

et donc

$$y_b(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_{by0}\,t \qquad (12)$$

Le mouvement horizontal est donné par l'intégration de (7) qui devient après simplication de la masse

$$\ddot{x}_b = 0$$

La solution s'obtient en suivant des étapes similaires à celles obtenues pour le mouvement vertical.

$$x_b(t) = v_{bx0}t \tag{13}$$

Condition d'interception. Le singe attrape la balle lorsque la balle et le singe occupent le même lieu au même temps. Il est nécessaire d'introduire un paramètre supplémentaire dans le problème qui est l'instant T de l'interception. La condition d'interception s'écrit alors

$$\begin{aligned} x_b(T) = x_s(T) \\ y_b(T) = y_s(T) \end{aligned}$$

ce qui se traduit par

$$v_{bx0}T = L \tag{14}$$

$$-\frac{1}{2}g\,T^2 + v_{by0}\,T = -\frac{1}{2}g\,T^2 + h \tag{15}$$

Les termes en T^2 disparaissent dans (15) pour donner

$$v_{by0}\,T = h$$

qui avec (14) et après élimination de T donne le rapport

$$\frac{v_{by0}}{v_{bx0}} = \frac{h}{L} \tag{16}$$

ce qui donne comme angle de visée

$$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{L}\right) \tag{17}$$

Il faut également que la vitesse soit suffisamment grande pour que la balle puisse atteindre le singe avant que celui-ci ne touche le sol. La condition que la hauteur du singe soit supérieure à zéro s'exprime comme

$$-\frac{1}{2}g\,T^2 + h > 0$$

ce qui fournit la condition sur le temps d'interception

$$T < \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

En introduisant cette expression dans (14) on trouve

$$v_{bx0} > \sqrt{\frac{g}{2h}}\,L \tag{18}$$

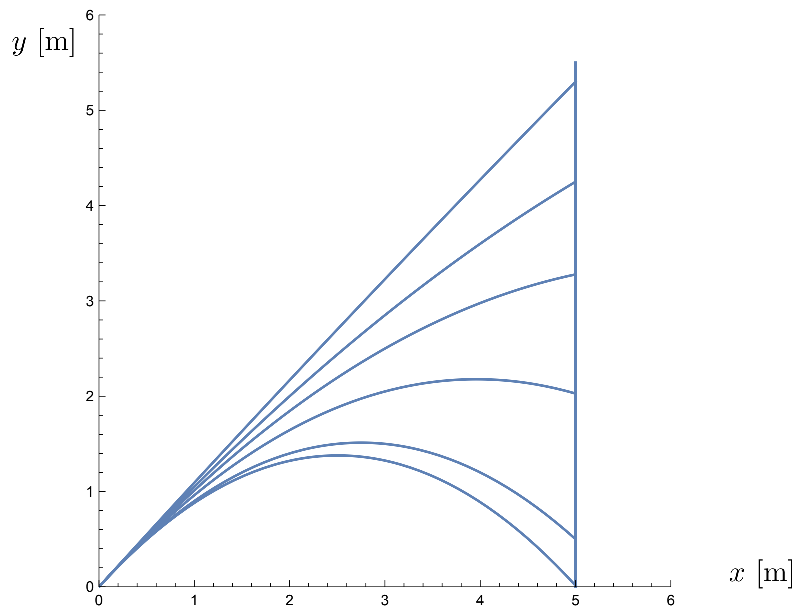

FIGURE 2: Trajectoires qui donnent lieu à l'interception. Elles partent toutes avec l'angle donné par (17) et atteignent le singe. Il faut lancer la balle avec une vitesse horizontale suffisamment forte pour que le singe reçoive la balle avant de toucher le sol (> 4.767 [m/s], cf. (18)).

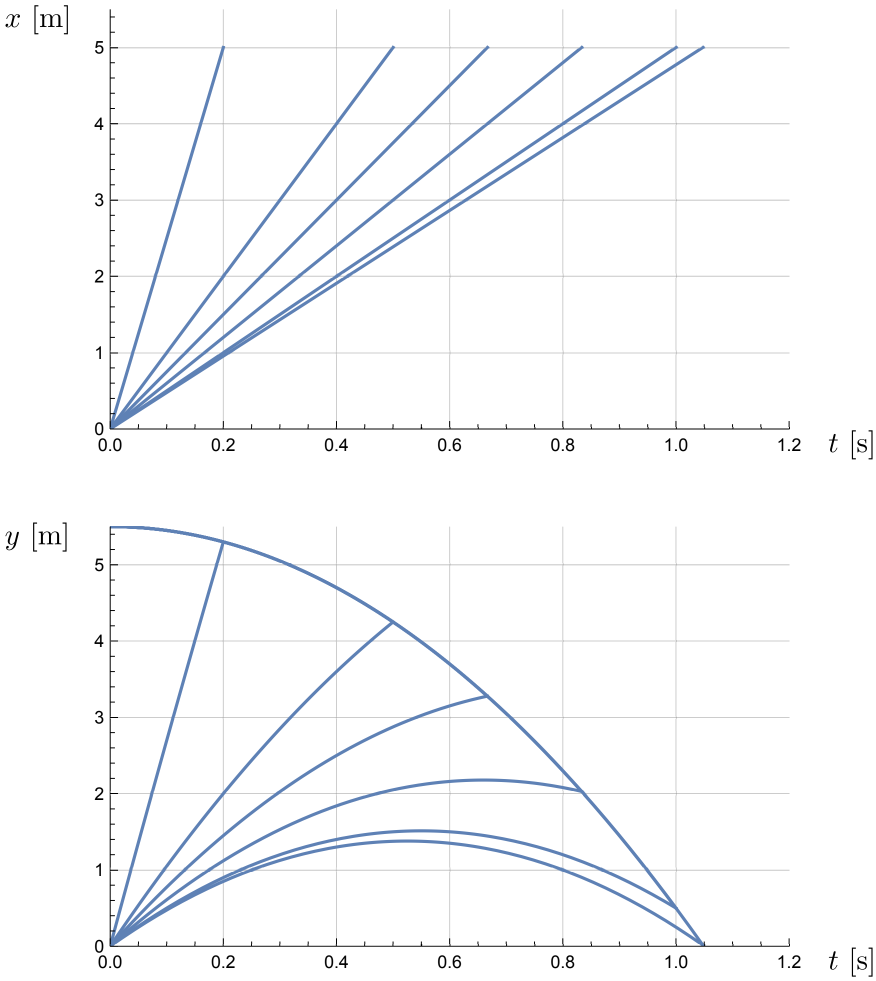

FIGURE 3: Equations horaires. En haut, la postion x_b de la balle en fonction du temps. En bas, la position du singe y_s en fonction du temps est donnée par la parabole supérieure, partant à la hauteur $h = 5.5$ [m]. On remarque que toutes les paraboles de la balle y_b touchent la parabole y_s exactement lorsque la position x_b du haut atteind la distance $L = 5$ [m] du singe. Il y a donc bel et bien interception.