

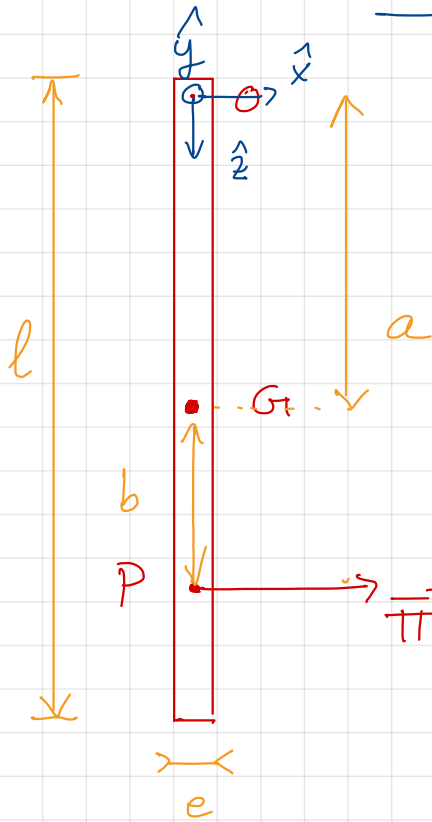
leson 9: choc, exemple complet
choc sur tige
centre de percussion.

Ph. Kießhaupt

Cours 261



Centre de percussion



Une barre de longueur l et largeur e , uniforme, initialement à l'arrêt, subit une percussion horizontale $\vec{\Pi}_P$ au point P .

Déterminer la position du point P (la distance b) pour qu'il n'y ait pas de répercussion en O , i.e. $\vec{\Pi}_O = \vec{0}$.

On applique les deux lois du choc (Newton des chocs)

$$\begin{cases} \vec{p}^{(+)} - \vec{p}^{(-)} = \vec{\Pi}_P + \vec{\Pi}_O \\ \vec{L}_O^{(+)} - \vec{L}_O^{(-)} = \vec{OP} \wedge \vec{\Pi}_P + \vec{OO} \wedge \vec{\Pi}_O \\ \quad \quad \quad = \vec{OP} \wedge \vec{\Pi}_P \end{cases}$$

Cinématique du solide: (tenseur d'inertie et moment cinétique)

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \mathcal{I}_O \vec{\omega} & \vec{L}_O^{(+)} &= \mathcal{I}_O \vec{\omega}^{(+)} \\ & & \vec{L}_O^{(-)} &= \mathcal{I}_O \vec{\omega}^{(-)} \end{aligned}$$

Que se passe-t-il juste après le choc ?

$$m \vec{V}_G^{(+)} = \vec{\Pi}_P + \vec{\Pi}_O$$

$$\vec{L}_O^{(+)} = \mathcal{I}_O \vec{\omega}^{(+)} = \vec{OP} \wedge \vec{\Pi}_P + \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{\Pi}_O}_0$$

Réécrivons les deux dernières expressions en enlevant (+).

$$(1) \quad m \vec{V}_G = \vec{\pi}_p + \vec{\pi}_0$$

$$(2) \quad \vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega} = \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_p$$

1ère méthode : exprimez $\vec{\pi}_p$ et gardez $\vec{\omega}$

utilisons (1) $\rightarrow$ (2) en éliminant $\vec{\pi}_p$

$$I_0 \vec{\omega} = \vec{OP} \wedge (m \vec{V}_G - \vec{\pi}_0)$$

cinématique du solide $\vec{V}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$

$$I_0 \vec{\omega} = \vec{OP} \wedge (m \vec{\omega} \wedge \vec{OG} - \vec{\pi}_0)$$

produit triple : m est d'abord factorisé

$$\begin{aligned} I_0 \vec{\omega} &= m \vec{OP} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OG}) - \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_0 \\ &= m (\underbrace{\vec{OP} \cdot \vec{OG}}_0) \vec{\omega} - \underbrace{(\vec{OP} \cdot \vec{\omega})}_{\perp \text{ perpendiculaire}} \vec{OG} - \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_0 \end{aligned}$$

$$\vec{OG} = a \hat{z}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{y}$$

$$\vec{OP} = (b+a) \hat{z}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OG} = (a+b)a$$

car $\perp$ perpendiculaire

$$I_0 \omega \hat{y} = m(a+b)a \omega \hat{y} - \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_0$$

On veut $\vec{\pi}_0 = 0$, quel que soit $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$.

$$I_0 \omega = m(a+b)a \omega$$

$$I_0 = m(a+b)a$$

à résoudre pour b

$$b = \frac{I_0}{ma} - a$$

centre de percussion

$$\frac{1}{12} m (e^2 + l^2) = I_G \quad a = \frac{l}{2}$$

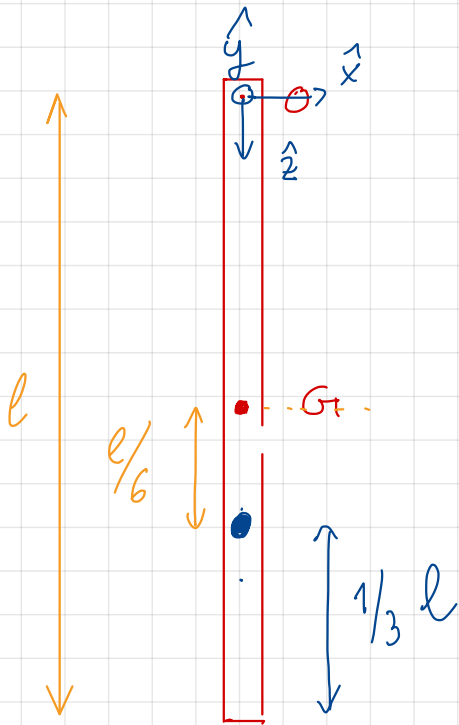
e négligeable. $I_G = \frac{1}{12} m l^2$

Steiner $I_o = I_G + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = I_G + \frac{m l^2}{4}$

$$= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{3 m l^2}{12} = \frac{4 m l^2}{12} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$b = \frac{I_o}{m a} - a = \frac{1}{3} \frac{m l^2}{m \frac{l}{2}} - \frac{l}{2}$$

$$= \frac{2}{3} l - \frac{l}{2} = \frac{4-3}{6} l = \frac{1}{6} l$$



$$(1) \quad m \vec{V}_G = \vec{\pi}_p + \vec{\pi}_0$$

$$(2) \quad \vec{L}_O = I_O \vec{\omega} = \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_p$$

2^{ème} méthode on garde $\vec{\pi}_p$, mais on élimine $\vec{\omega}$

$$(2) \rightarrow \vec{\omega} = \frac{1}{I_O} \vec{OP} \wedge \vec{\pi}_p$$

$$\vec{OP} = +(a+b) \hat{z}$$

$$\vec{\pi}_p = \pi_p \hat{x}$$

$$\vec{\omega} = \frac{(a+b) \pi_p}{I_O} \hat{z} \wedge \hat{x} = \frac{(a+b) \pi_p}{I_O} \hat{y}$$

$$(1) \quad m \vec{V}_G = \vec{\pi}_p + \vec{\pi}_0$$

cinématique du solide $\vec{V}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{OG}$

$$\rightarrow m \left(\frac{a+b}{I_O} \pi_p \hat{y} \wedge (a \hat{z}) \right) = \pi_p \hat{x} + \vec{\pi}_0$$

$$m \left(\frac{a+b}{I_O} \pi_p \cdot a \right) \hat{x} = \pi_p \hat{x} + \vec{\pi}_0$$

mais pour $\vec{\pi}_0 = 0$ et quel que soit π_p ,

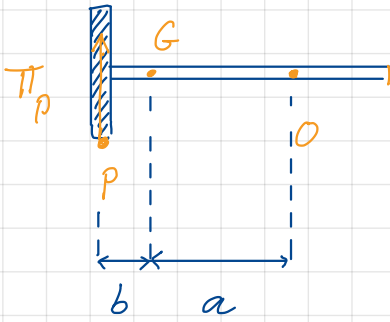
$$m \left(\frac{a+b}{I_O} \cdot a \right) = 1$$

$$\rightarrow \boxed{b = \frac{I_O}{ma} - a}$$

la même condition que celle obtenue précédemment.

Autres exemples similaires :

marteau :



$$b = \frac{I_O}{ma} - a$$

Les paramètres doivent respecter cette condition pour avoir $\vec{\Pi}_O = \vec{0}$.

G : centre de masse du marteau

I_O : inertie au point O .

$$I_O = I_G + ma^2$$

$$b = \frac{I_G + ma^2}{ma} - a = \frac{I_G}{ma}$$

$$a = \frac{I_G}{mb}$$

$\Rightarrow$ Ainsi en trouvant le centre de masse G (le paramètre b), connaissant I_G , on détermine la position où il faut tenir le marteau.

$$I_G = mab$$

$\Rightarrow$ interprétation: prendre un marteau, le peser pour trouver m , déterminer G en trouvant son équilibre de rotation ($\rightarrow b$); utiliser le marteau et déterminer l'endroit où il faut le tenir pour ne plus sentir de répercussion ($\rightarrow a$)
On obtient expérimentalement $I_G = mab$ [kg m^2].