
Examen Blanc PG1 - 2021

Section GM - total 3 h

4 décembre 2021

Nom :

Prénom :

SCIPER :

1 Equilibre d'un cylindre scié (20 points)

Soit un cylindre de rayon R dont on a enlevé une partie selon la figure. La partie supprimée est sciée sur la tranche située à $\frac{1}{2}R$. La masse spécifique (volumique) est μ [kg/m³]. Lié à ce cylindre se trouve une poulie autour de laquelle un fil est enroulé. L'ensemble lié, poulie et cylindre, tourne librement et sans frottement autour de l'axe de la poulie. Le fil relie la poulie à une des extrémités d'un ressort de constante de rigidité k . L'autre extrémité du ressort est relié à une masse M en [kg]. La gravité $\mathbf{g}$ agit verticalement.

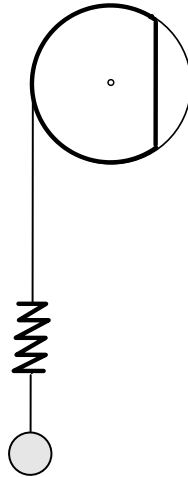


FIGURE 1 – Un cylindre scié à $\frac{R}{2}$ entraîne une poulie autour de laquelle un fil est attaché et enroulé qui relie la poulie à un ressort. Une masse M est attachée à l'autre extrémité du ressort.

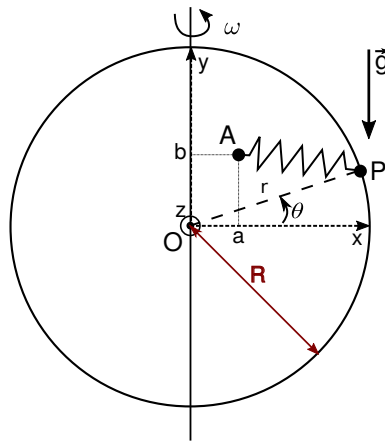
1. Déterminer la position du centre de masse. Indication : Utiliser les coordonnées cartésiennes et découper le cylindre en tranches verticales d'épaisseur dx . Si nécessaire, utiliser la primitive

$$\int 2\sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$$

2. Déterminer les angles du cylindre à l'équilibre. Déterminer la masse maximale M pour qu'il y ait a) 1 solution et b) 2 solutions.
3. Déterminer l'allongement du ressort dans chaque cas.

2 Point matériel sur un anneau tournant (20 points)

Un point matériel de masse m est contraint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical de rayon R et de centre O . Le point matériel est soumis à la gravité $\mathbf{g}$ et à la force d'un ressort. Le ressort est attaché à un point A fixe dans le référentiel du cercle et de coordonnées $x = a$, $y = b$ et $z = 0$ (voir figure ci-dessous). Le ressort a une constante k et une longueur à vide supposée nulle. Le cercle peut tourner autour de l'axe vertical y à une vitesse angulaire ω constante. Cependant, pour les questions (a), (b), (c), et (d), le cercle ne tourne pas autour de l'axe y ($\omega = 0$). Les systèmes de coordonnées cartésiennes (x, y, z) et cylindriques (r, θ, z) sont liés au cercle.



1. Avec $\omega = 0$, spécifier les contraintes géométriques s'exerçant sur le mouvement du point matériel, puis énumérer les forces s'exerçant sur le point matériel et donner leurs projections sur le repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \hat{\mathbf{z}})$ associé aux coordonnées polaires r, θ et z , repère centré en O .
2. Avec $\omega = 0$, faire un bilan des forces et établir les équations du mouvement dans le repère $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \hat{\mathbf{z}})$.
3. Avec $\omega = 0$, est-ce que l'énergie mécanique totale (cinétique + potentielle) du point matériel est conservée? Justifier.
4. Avec $\omega = 0$, établir les positions d'équilibre du point matériel (θ à l'équilibre), et exprimer cet angle en fonction de k, m, g, a et b . Indiquer le type de stabilité. Dans le cas d'une position stable, calculer la fréquence des oscillations autour de la position d'équilibre.
5. On considère maintenant le cas où l'anneau tourne autour de l'axe y à une vitesse angulaire ω non nulle et constante. Etablir les équations du mouvement selon $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \hat{\mathbf{z}})$. Dans le cas $a = 0$, trouver les positions d'équilibre du point matériel dans le référentiel du cercle.