

Effets gyroscopiques

Angles et équations d'Euler

Philippe Müllhaupt

Institut de Génie Mécanique



Physique Générale I

Table des matières

1 référentiels accélérés

2 angles d'Euler

3 équations d'Euler

Cinématique des référentiels accélérés

Vitesse absolue et relative

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$$

L'évolution temporelle des vecteurs unités $\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3$ est décrite par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$.

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}_i}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_i \quad i = 1, 2, 3$$

Cinématique des référentiels accélérés

Vitesse absolue et relative

$$\mathbf{AP} = \sum_i y_i \hat{\mathbf{y}}_i = y_1 \hat{\mathbf{y}}_1 + y_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{y}}_3$$

La vitesse de P , mesurée dans le référentiel relatif, est donnée par

$$\mathbf{v}_r(P) = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i = \dot{y}_1 \hat{\mathbf{y}}_1 + \dot{y}_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + \dot{y}_3 \hat{\mathbf{y}}_3$$

Cinématique des référentiels accélérés

Vitesse absolue et relative

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_a(P) &= \frac{d}{dt} \mathbf{OP} = \frac{d}{dt} \mathbf{OA} + \frac{d}{dt} \mathbf{AP} \\
 &= \mathbf{v}_a(A) + \frac{d}{dt} (y_1 \hat{\mathbf{y}}_1 + y_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{y}}_3)
 \end{aligned}$$

... Leibniz ...

$$= \mathbf{v}_a(A) + \sum_i \dot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i + \sum_i y_i \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i$$

... Poisson ...

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \sum_i y_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_i) \\
 &= \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \sum_i y_i \hat{\mathbf{y}}_i \\
 &= \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}
 \end{aligned}$$

Cinématique des référentiels accélérés

Accélération absolue et relative

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_a(P) &= \mathbf{a}_a(A) + \frac{d}{dt} \left(\sum \dot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i \right) + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}) \\
 &= \mathbf{a}_a(A) + \sum (\ddot{y}_i \hat{\mathbf{y}}_i) + \sum (\dot{y}_i \dot{\hat{\mathbf{y}}}_i) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{P} \\
 &= \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \sum (\dot{y}_i (\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_i)) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{A}}\mathbf{P} \\
 &= \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} \\
 &\quad + \boldsymbol{\Omega} \wedge \{ \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP} \}
 \end{aligned}$$

... finalement ...

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP})$$

Angles d'Euler

Principes

Pour positionner un solide dans l'espace, il faut trois coordonnées de translation et trois coordonnées pour les rotations. On s'intéresse aux rotations. Le positionnement angulaire est donné par trois rotations successives dont les axes ne sont pas identiques deux fois de suite

Définition (... axes 3-1-3)

- 1 rotation d'angle ψ autour de l'axe x_3
- 2 rotation d'angle θ autour de l'axe x_1'
- 3 rotation d'angle ϕ autour de l'axe x_3''

Angles d'Euler

Trois repères successifs centrés au même point

- ① (G, x_1, x_2, x_3) , repère dont les axes sont parallèles aux axes du repère lié au référentiel inertiel
- ② (G, x'_1, x'_2, x'_3) , après la rotation de ψ
- ③ (G, x''_1, x''_2, x''_3) , après les deux rotations successives $\psi \rightarrow \theta$
- ④ $(G, x'''_1, x'''_2, x'''_3)$, après les trois rotations successives $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$

Axes conservés entre deux rotations

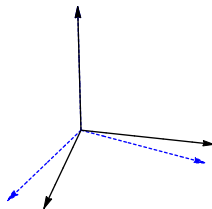
- ① $x_3 = x'_3$
- ② $x'_1 = x''_1$
- ③ $x''_3 = x'''_3$

Angles d'Euler

Première rotation d'angle ψ et d'axe x_3

$$\begin{aligned} GP &= x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3 \\ &= x'_1 \hat{x}'_1 + x'_2 \hat{x}'_2 + x'_3 \hat{x}'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

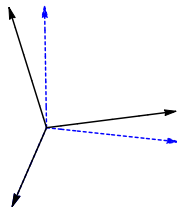


Angles d'Euler

Deuxième rotation d'angle θ et d'axe x_1'

$$\begin{aligned} GP &= x_1' \hat{x}_1' + x_2' \hat{x}_2' + x_3' \hat{x}_3' \\ &= x_1'' \hat{x}_1'' + x_2'' \hat{x}_2'' + x_3'' \hat{x}_3'' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

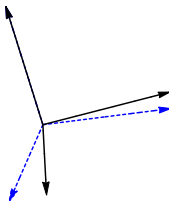


Angles d'Euler

Troisième rotation d'angle ϕ et d'axe x_3''

$$\begin{aligned} GP &= x_1'' \hat{x}_1'' + x_2'' \hat{x}_2'' + x_3'' \hat{x}_3'' \\ &= x_1''' \hat{x}_1''' + x_2''' \hat{x}_2''' + x_3''' \hat{x}_3''' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$



Angles d'Euler

Vitesse angulaire instantanée de rotation...

... due à la rotation du solide repéré par les angles d'Euler ...

$$\begin{aligned}\Omega &= \dot{\psi}\hat{x}_3 + \dot{\theta}\hat{x}_1' + \dot{\phi}\hat{x}_3'' \\ &= \dot{\psi}\hat{x}_3' + \dot{\theta}\hat{x}_1'' + \dot{\phi}\hat{x}_3'''\end{aligned}$$

Angles d'Euler

Vitesse angulaire instantanée de rotation...

... exprimée dans le repère lié au solide $(G, x_1''', x_2''', x_3''')$...

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \hat{x}_i'''
 \end{aligned}$$

Equations Euler

Objectif

Grâce au théorème du centre de masse, nous savons établir les équations différentielles de la translation du solide. En se concentrant sur la description de la rotation par rapport au centre de masse, nous découplons la translation de la rotation. Il s'agit alors de déterminer les équations différentielles qui permettent de calculer les angles d'Euler qui repèrent l'orientation du solide dans l'espace. Six équations différentielles sont nécessaires (3 pour les angles et 3 pour les vitesses angulaires).

Equations d'Euler

Tenseur d'inertie diagonal au centre de masse

$$\mathbf{I}_G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Equations différentielles pour les vitesses angulaires

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + M_{G1}^{\text{ext}} \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3 + M_{G2}^{\text{ext}} \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + M_{G3}^{\text{ext}} \end{aligned}$$

Equations d'Euler

Lois de la dynamique

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} &= \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \\ \mathbf{L}_G &= \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega}\end{aligned}$$

Démonstration des équations d'Euler (tenseur diagonal)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_G &= I_1 \Omega_1 \hat{\mathbf{x}}_1''' + I_2 \Omega_2 \hat{\mathbf{x}}_2''' + I_3 \Omega_3 \hat{\mathbf{x}}_3''' \\ &= I_1 \Omega_1 \hat{\mathbf{y}}_1 + I_2 \Omega_2 \hat{\mathbf{y}}_2 + I_3 \Omega_3 \hat{\mathbf{y}}_3\end{aligned}$$

Equations d'Euler

Démonstration (suite)

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = & +I_1\dot{\Omega}_1\hat{\mathbf{y}}_1 + I_1\Omega_1\dot{\hat{\mathbf{y}}}_1 \\ & +I_2\dot{\Omega}_2\hat{\mathbf{y}}_2 + I_2\Omega_2\dot{\hat{\mathbf{y}}}_2 \\ & +I_3\dot{\Omega}_3\hat{\mathbf{y}}_3 + I_3\Omega_3\dot{\hat{\mathbf{y}}}_3\end{aligned}$$

Equations d'Euler

Démonstration (suite)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} &= +I_1\dot{\Omega}_1\hat{\mathbf{y}}_1 + I_1\Omega_1(\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_1) \\
 &\quad + I_2\dot{\Omega}_2\hat{\mathbf{y}}_2 + I_2\Omega_2(\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_2) \\
 &\quad + I_3\dot{\Omega}_3\hat{\mathbf{y}}_3 + I_3\Omega_3(\boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{y}}_3) \\
 \\
 &= +I_1\dot{\Omega}_1\hat{\mathbf{y}}_1 + I_1\Omega_1(\Omega_3\hat{\mathbf{y}}_2 - \Omega_2\hat{\mathbf{y}}_3) \\
 &\quad + I_2\dot{\Omega}_2\hat{\mathbf{y}}_2 + I_2\Omega_2(\Omega_1\hat{\mathbf{y}}_3 - \Omega_3\hat{\mathbf{y}}_1) \\
 &\quad + I_3\dot{\Omega}_3\hat{\mathbf{y}}_3 + I_3\Omega_3(\Omega_2\hat{\mathbf{y}}_1 - \Omega_1\hat{\mathbf{y}}_2)
 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie cinétique

En absence de moment de force, $M_G^{\text{ext}} = 0$

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2) \\ \frac{d}{dt} E_{\text{cin}} &= 0 \end{aligned}$$

Conservation de l'énergie cinétique

Démonstration

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} E_{\text{cin}} &= I_1 \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + I_2 \Omega_2 \dot{\Omega}_2 + I_3 \Omega_3 \dot{\Omega}_3 \\
 &= I_1 \Omega_1 \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 \right) \\
 &\quad + I_2 \Omega_2 \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \right) \\
 &\quad + I_3 \Omega_3 \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 \right) \\
 &= ((I_2 - I_3) + (I_3 - I_1) + (I_1 - I_2)) \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Moment cinétique en fonction des référentiels

Dans le référentiel galién $(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ centré au centre de masse

Toutes les composantes sont constantes dans le référentiel absolu, car il n'y a pas de couple extérieur, $\frac{d}{dt}\mathbf{L}_G = 0$, autrement dit

$$\mathbf{L}_G(t) = \begin{pmatrix} L_{G_1}(0) \\ L_{G_2}(0) \\ L_{G_3}(0) \end{pmatrix}_{(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)} = \text{Constante}$$

Dans le référentiel embarqué $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

Les composantes sont celles du moment cinétique dans le référentiel galiléen tourné pour correspondre au repère du référentiel embarqué. Bien que les composantes sont variables dans le temps, *le module du vecteur est conservé par les propriétés de la rotation !*

Moment cinétique dans le référentiel embarqué

Démonstration de la conservation de $\|L_G\|$ dans le référentiel $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

$$\begin{aligned}
 L_G|_{(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)} &= \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i \hat{y}_i = I_G \Omega \\
 \|L_G\|^2 &= (I_G \Omega) \bullet (I_G \Omega) \\
 &= I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2
 \end{aligned}$$

Moment cinétique dans le référentiel embarqué

Démonstration (suite)...

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|\mathbf{L}_G\|^2 &= 2 I_1^2 \Omega_1 \dot{\Omega}_1 + 2 I_2^2 \Omega_2 \dot{\Omega}_2 + 2 I_3^2 \Omega_3 \dot{\Omega}_3 \\
 &= 2 I_1^2 \Omega_1 \left(\frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 \right) \\
 &\quad + 2 I_2^2 \Omega_2 \left(\frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 \right) \\
 &\quad + 2 I_3^2 \Omega_3 \left(\frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 \right) \\
 &= 2 [I_1(I_2 - I_3) + I_2(I_3 - I_1) + I_3(I_1 - I_2)] \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \\
 &= 2 (I_1 I_2 - I_1 I_3 + I_2 I_3 - I_1 I_2 + I_1 I_3 - I_2 I_3) \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Résumé des conservations en absence de moment extérieur

$$bsM_G^{\text{ext}} = 0$$

Energie est conservée

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \bullet \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega} = \text{cst.}$$

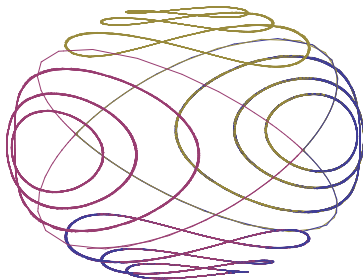
$$I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2 = \text{cst.}$$

Le module du moment cinétique est conservé

$$\|\mathbf{L}_G\|^2 = I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 = \text{cst.}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\Omega} \in$ intersection de deux ellipsoïdes !!

Equations d'Euler



Le vecteur ω demeure sur l'intersection de deux ellipsoïdes expliquant l'instabilité autour de l'axe intermédiaire

Equations d'Euler

