

Cadre roulant sur équerre – équilibre

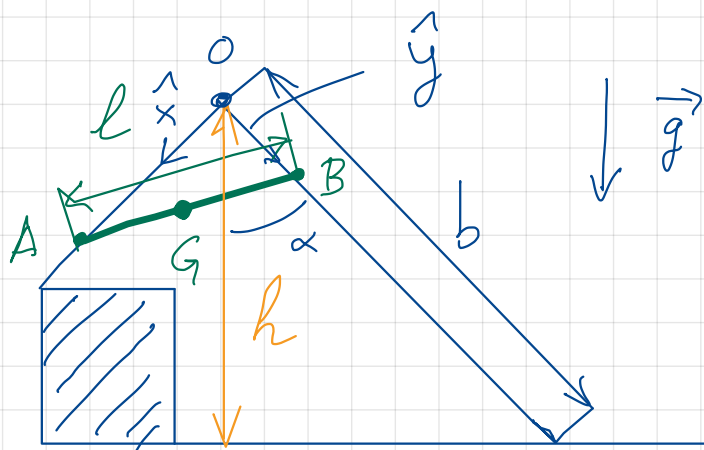
- méthode des travaux
virtuels.

Ph. Tillhaupt

16 / 12 / 20







Essayons de déterminer la position d'équilibre

$$\vec{OA} = \bar{x}_B \hat{x}$$

$$\vec{OB} = \bar{y}_B \hat{y} = d \hat{y}$$

d à déterminer.

Liaisons: — deux liaisons:

A est lié (bilatéralement) à la droite d'équation $y_A = 0$

B est lié (bilat.) à la droite d'équation $x_B = 0$

Partons des coordonnées libres: (4 en tout)

$$x_A, x_B, y_A, y_B$$

4 coord., il y a 3 liaisons:

$$l^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ liaisons} &= \left\{ \begin{array}{l} (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - l^2 = 0 \\ y_A = 0 \\ x_B = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On a bien un système à 1 degré de liberté.

Calculons SW: 1 seule force appliquée, la gravité, tout le reste (forces liaisons) est pris en charge par le principe de d'Alembert.

$$\delta W = m \vec{g} \cdot \delta \vec{OG}$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \quad \text{ici} \quad \vec{F} = m\vec{g}$$

$$\vec{r} = \vec{OG}$$

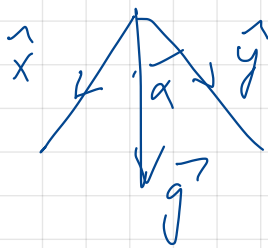
$$\vec{OG} = \left(\frac{x_A + x_B}{2} \right) \hat{x} + \left(\frac{y_A + y_B}{2} \right) \hat{y}$$

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{OG}$$

Le principe des travaux virtuels stipule qu'à l'équilibre $\delta W = 0$ pour tout déplacement compatible avec les liaisons. Calculons d'abord δW pour un déplacement arbitraire $\delta x_A, \delta x_B, \delta y_A, \delta y_B$ et on imposera les liaisons ensuite.

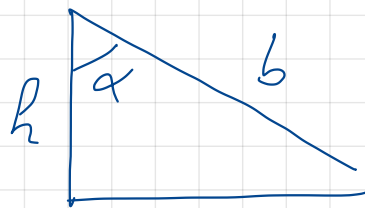
$$\delta \vec{r} = \delta \vec{OG} = \left(\frac{\delta x_A + \delta x_B}{2} \right) \hat{x} + \left(\frac{\delta y_A + \delta y_B}{2} \right) \hat{y}$$

il faut exprimer $\vec{g}$ dans le repère $(O, \hat{x}, \hat{y})$



$$\vec{g}' = g \cos \alpha \hat{y} + g \sin \alpha \hat{x}$$

Relation avec les triangles



$$\cos \alpha = \frac{h}{b}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$$

$$\vec{g}' = g \frac{h}{b} \hat{y} + g \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \hat{x}$$

$$\delta W = m \vec{g} \cdot \delta \vec{r} = \frac{mg}{2} \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} (\delta x_A + \delta x_B) + \frac{mg}{2} \frac{h}{b} (\delta y_A + \delta y_B)$$

$\delta W = 0$ si et seulement si

équilibre, et $\delta x_A, \delta x_B, \delta y_A, \delta y_B$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = 0 \\ x_B = 0 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 - l^2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \delta y_A = 0 \\ \delta x_B = 0 \\ 2(x_A - x_B)(\delta x_A - \delta x_B) + 2(y_A - y_B)(\delta y_A - \delta y_B) = 0 \end{array} \right.$$

Comme on conserve 1 d° de liberté, un déplacement résiduel dû aux δx_A et δy_B doit être possible ($\delta x_B = 0, \delta y_A = 0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W = \frac{mg}{2} \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} \delta x_A + \frac{mg}{2} \frac{h}{b} \delta y_B = 0 \\ 2x_A \delta x_A - 2(-y_B) \delta y_B = 0 \end{array} \right.$$

Le déplacement résiduel entraîne que le déterminant de la matrice associée à ce système linéaire d'équations à deux inconnues δx_A et δy_B doit s'annuler (sinon le système serait complètement bloqué $\delta x_A = 0, \delta y_B = 0$)

$$\begin{vmatrix} \frac{mg}{2} \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} & \frac{mg}{2} \frac{h}{b} \\ 2x_A & 2y_B \end{vmatrix} = 0$$

$$\cancel{\frac{mg}{2}} \cancel{\frac{1}{2}} y_B \sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}} - \cancel{\frac{mg}{2}} \cancel{\frac{1}{2}} x_A \frac{h}{b} = 0$$

C'est une équation d'une droite, qui, lorsque combinée avec la liaison

$$x_A^2 + y_B^2 - l^2 = 0$$

donne le point d'équilibre

$$x_A = \sqrt{\frac{b^2}{h^2} - 1} y_B$$

$$\left(\frac{b^2}{h^2} - 1 \right) y_B^2 + y_B^2 - l^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{h^2} y_B^2 = l^2$$

$$d = y_B = \frac{l \cdot h}{b}$$