

Complément

Lois de la dynamique et moments

Objectif

Le moment de force et le moment cinétique permettent d'énoncer des lois qui sont invariantes par rotation. En particulier, les lois de la dynamique des solides s'énoncent de manière concise et complète. On présente les théorèmes avec leurs démonstrations. Celles-ci reposent sur les lois de Newton. Ainsi, il est souvent nécessaire de se placer dans un référentiel Galiléen (i.e. référentiel à l'arrêt ou en translation uniforme). On rappelle également certains théorèmes concernant les translations. Prêter attention au fait que les forces obéissant le principe d'action-réaction (avec le support des forces alignés avec les points subissant ces forces) disparaissent pour laisser uniquement les forces et moments extérieurs. On rappelle également les définitions des forces internes et externes.

Variation de la quantité de mouvement et résultante des forces

Partant de la loi de Newton pour un point matériel,

$$\frac{d}{dt}(m \mathbf{v}_P) = \mathbf{F}_P$$

où $\mathbf{F}_P$ désigne la résultante des forces qui s'appliquent au point P , il suffit de faire la somme de toutes les points matériels pour arriver au résultat suivant :

Centre de masse

Pour un système de points matériels, un point joue un rôle clé. C'est le centre de masse.

Définition 1 (DU CENTRE DE MASSE) *Le centre de masse d'un système de points matériels est défini par*

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha}$$

avec la masse totale

$$M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

Il possède la propriété suivante

Théorème 1 (ACCÉLÉRATION DU CENTRE DE MASSE, VERSION 1)

$$M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_G = \mathbf{R} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}$$

Explications : Quel que soit le système de points matériels, la résultante de toutes les forces est en relation avec l'accélération du centre de masse. Ce point G est un point qui peut être à l'extérieur de l'ensemble géométrique des points matériels. Il se comporte comme si toute la masse y était concentrée. Le mouvement de ce point suit celui d'un point matériel unique soumis uniquement à la résultante des forces.

Démonstration : En partant des lois de Newton pour chacun des points matériel

$$\frac{d}{dt}(m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = \mathbf{F}_{\alpha}$$

il suffit de sommer toutes ces équations afin d'obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \frac{d}{dt}(m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) &= \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{R} \\ \frac{d}{dt} \sum_{\alpha} (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) &= \mathbf{R} \\ M \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right) &= \mathbf{R} \\ M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_G &= \mathbf{R} \end{aligned}$$

et la dernière inférence suit de la définition du centre de masse

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha}$$

après dérivation de celle-ci par rapport au temps.

C.Q.F.D.

Forces internes et externes

Toutes les forces qui ont une force de réaction opposée (action-réaction) *également contenue dans le système de forces* sont appelées des forces internes, par opposition aux forces externes qui sont appliquées par un corps à l'extérieur du système de forces considérés. Lorsqu'aucune force externe n'est appliquée et que seules les forces internes sont en jeu, le système est dit isolé.

$$\mathbf{R} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\beta}^{\text{ext}}$$

En tenant compte de la troisième loi de Newton concernant les forces internes se décomposent

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} = \sum_{\beta} \sum_{\alpha \neq \beta} \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}$$

avec

$$\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} = -\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha}$$

Grâce à cette décomposition issue de la loi de l'action-réaction, on peut donner une forme plus précise au précédant théorème :

Théorème 2 (ACCÉLÉRATION DU CENTRE DE MASSE, VERSION 2)

$$M \frac{d}{dt} \mathbf{v}_G = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

Démonstration : En séparant les forces qui s'appliquent sur les points matériels entre les forces externes et les forces interne, on a pour chaque masse

$$\mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

et lors de la somme, on constate que

$$\sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$$

car par le principe d'action-réaction on a

$$\mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} = -\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}$$

ce qui fait disparaître la contributions des forces internes et on aboutit au résultat en suivant la même technique que pour la démonstration du théorème 1.

Moment de force

L'idée intuitive est d'associer au point A l'effet de levier de toutes les forces qui s'exercent sur les différents points matériels P_{α} . On constate que ce levier change selon le point A considéré puisque la distance entre le point A et les points d'application des forces P_{α} change. Le moment de force joue non seulement un rôle important lors des équilibres statiques mais également lors du mouvement de l'ensemble des points matériels.

Définition 2 (MOMENT DE FORCE) *Le moment de force $\mathbf{M}_A$ lié au point A est défini par*

$$\mathbf{M}_A = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha}$$

où $\mathbf{F}_{\alpha}$ est la somme de toutes les forces qui s'exercent sur le point P_{α} . La somme $\sum_{\alpha}$ s'étend à tous les points matériel P_{α}, m_{α} .

Moment cinétique

Le moment cinétique au point A , noté $\mathbf{L}_A$, est le pendant de la quantité de mouvement lorsqu'on considère la rotation instantanée et l'effet dynamique de celle-ci. La variation du moment cinétique est en équilibre avec la résultante des moments de forces, un peu comme la variation de la quantité de mouvement est en équilibre à chaque instant donné avec la résultante des forces. En d'autres termes, le moment de force entraîne une modification du mouvement qui se traduit par une modification du moment cinétique. Les vitesses et les masses des points matériels sont pondérées par les bras de levier correspondants, exactement comme les forces étaient pondérées par les bras de levier correspondants lors du calcul du moment de force à partir des forces.

Définition 3 (MOMENT CINÉTIQUE)

$$\mathbf{L}_A = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{p}_{\alpha}$$

Variation du moment cinétique et résultante des moments

Théorème 3 (DU MOMENT CINÉTIQUE EN UN POINT FIXE D'UN RÉF. GALILÉEN)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O$$

Démonstration : On applique les définitions et on dérive. On utilise les propriétés de linéarité du produit vectoriel et de la dérivée ainsi que la règle de Leibniz pour la dérivée des produits (produit vectoriel). L'étape importante et qui repose sur la nécessité d'avoir un référentiel Galiléen est le remplacement des accélérations par les forces et qui utilise les lois de Newton. Ceci ne pourrait pas s'appliquer dans le cas d'un référentiel non Galiléen. En détail, cela donne

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \right) \quad (1)$$

$$= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (\mathbf{OP}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})) \quad (2)$$

$$= \sum_{\alpha} \left[\mathbf{O}\dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) + \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \frac{d}{dt} (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \right] \quad (3)$$

$$= \sum_{\alpha} \left[\mathbf{O}\dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \right] + \sum_{\alpha} \left[\mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \frac{d}{dt} (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \right] \quad (4)$$

$$= \sum_{\alpha} \left[\mathbf{O}\dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}) \right] + \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \quad (5)$$

$$= \sum_{\alpha} [\mathbf{v}_{\alpha} \wedge (m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha})] + \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \quad (6)$$

$$= \mathbf{0} + \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \quad (7)$$

$$= \mathbf{M}_O \quad (8)$$

La justification des étapes (1) à (8) s'établit comme suit :

(1)	définition de $\mathbf{L}_O$
(1) → (2)	dérivée d'une somme vectorielle $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}}$
(2) → (3)	règle de Leibniz pour le produit vectoriel $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \dot{\mathbf{b}}$
(3) → (4)	regroupement des sommes $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_n$
(4) → (5)	loi 2 de Newton $\frac{d}{dt}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = \mathbf{F}_\alpha$
(5) → (6)	définition de la vitesse $O\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha$
(6) → (7)	$\mathbf{v}_\alpha$ aligné avec $m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \Rightarrow$ produit vectoriel nul
(7) → (8)	définition de $\mathbf{M}_O$

C.Q.F.D.

Théorème 4 (DU MOMENT CINÉTIQUE EN UN POINT FIXE D'UN RÉF. GALILÉEN)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \mathbf{M}_O \\
&= \sum_{\alpha} O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge (\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) \\
&= \left(\sum_{\alpha} O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \right) \right) + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \left(O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + O\mathbf{P}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) + \mathbf{M}_O^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \left(O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + (O\mathbf{P}_{\alpha} + \mathbf{P}_{\alpha}\mathbf{P}_{\beta}) \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) \\
&\quad + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \sum \left(O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + O\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} + \mathbf{P}_{\alpha}\mathbf{P}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) \\
&\quad + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \mathbf{M}_O^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

Loi 3 de Newton (action-réaction) & $\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}$ est alignée avec la droite passant par P_{α} et P_{β}

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \mathbf{M}_O \\
&= \sum_{\alpha} \mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge (\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) \\
&= \left(\sum_{\alpha} \mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \left(\sum_{\beta \neq \alpha} \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} \right) \right) + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \left(\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{O}\mathbf{P}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) + \mathbf{M}_O^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq N} \left(\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + (\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} - \mathbf{P}_{\alpha}\mathbf{P}_{\beta}) \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) \\
&\quad + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \sum \left(\mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\beta \rightarrow \alpha} + \mathbf{O}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} - \mathbf{P}_{\alpha}\mathbf{P}_{\beta} \wedge \mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta} \right) \\
&\quad + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \\
&= \mathbf{M}_O^{\text{ext}}
\end{aligned}$$

Loi 3 de Newton (action-réaction) & $\mathbf{F}^{\alpha \rightarrow \beta}$ est alignée avec la droite passant par P_{α} et P_{β}

C.Q.F.D.

Théorème 5 (DU MOMENT CINÉTIQUE AU CENTRE DE MASSE, VERSION 1)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{M}_G \quad (9)$$

Démonstration :

On part des définitions et on dérive. On utilise également la définition du centre de masse. Un produit vectoriel est toujours nul entre deux vecteurs proportionnels. En détails,

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_G &= \frac{d}{dt} \mathbf{L}_G \\
\mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right) \\
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{G} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{G} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{G} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{M}_G \\
\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} (\mathbf{O} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{O}} \mathbf{G}) \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} + \mathbf{M}_G \tag{10} \\
\sum_{\alpha} (\mathbf{O} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} - \dot{\mathbf{O}} \mathbf{G}) \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \mathbf{O} \dot{\mathbf{P}}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{G} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{G} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
&= - \sum_{\alpha} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{G} \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
&= - \sum_{\alpha} \mathbf{v}_G \wedge m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
&= - \mathbf{v}_G \wedge \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \\
&= - \mathbf{v}_G \wedge M \left(\frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} \right) \\
&= - \mathbf{v}_G \wedge M \mathbf{v}_G = \mathbf{0} \tag{11}
\end{aligned}$$

et grâce à (11), (10) conduit bien à (9).

C.Q.F.D

Théorème 6 (DU MOMENT CINÉTIQUE AU CENTRE DE MASSE, VERSION 2)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{M}_G^{ext}$$

Démonstration :

Les moments dus aux forces internes se compensent comme on l'a vu pour le théorème 4. Il suffit de partir de (9) et de constater que les forces internes obéissant au principe d'action-réaction sont toujours par paires dont les éléments sont opposés l'un de l'autre. D'autre part, elles sont toujours dirigées dans le sens de la droite qui relie les points correspondants. Ces deux propriétés entraînent l'annulation de la contribution des forces internes au moment de force au point G .

en un point quelconque

Théorème 7 (DU MOMENT CINÉTIQUE EN UN POINT QUELCONQUE)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_A = \mathbf{M}_A - M\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{v}_G$$

Démonstration : En utilisant les transferts

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{L}_O + \mathbf{AO} \wedge M\mathbf{v}_G$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_O + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R}$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{L}_A &= \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{L}_O + \dot{\mathbf{AO}} \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R} \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{L}_O - \dot{\mathbf{OA}} \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R} \\ &= \mathbf{M}_O - \mathbf{v}_A \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R} \\ &= \mathbf{M}_O + \mathbf{AO} \wedge \mathbf{R} - M\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{v}_G \\ &= \mathbf{M}_A - M\mathbf{v}_A \wedge \mathbf{v}_G \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Remarque : La démonstration utilise uniquement des relations cinématiques (dérivées de position) et les transferts. Ces derniers proviennent directement des définitions. On peut ainsi dire que la démonstration repose sur la loi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O$$

qui repose sur la possibilité d'appliquer les lois de Newton et qui est donc valable uniquement dans un référentiel Galiléen.