

Complément

Eléments de volume infinitésimal

Objectif

La justification des éléments de volume lors des intégrales multiples peut se faire soit de manière intuitive, soit de manière analytique. On présente les deux approches afin de démontrer le calcul des éléments de volume en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

Elément de volume

Coordonnées cartésiennes

Soit $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ un repère centré sur O permettant de repérer un point P par les coordonnées du vecteur $\mathbf{OP}$,

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

On appelle également $\mathbf{OP}$ le rayon vecteur que l'on note $\mathbf{r}$. Le rayon vecteur infinitésimal est alors donné par

$$d\mathbf{OP} = d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$$

L'élément de volume infinitésimal est donné par le volume d'un petit cube dont les longueurs sont les quantités d'accroissement infinitésimal dx , dy , dz . Si on se rappelle que le déterminant donne également un volume, il est possible d'écrire

$$\begin{aligned} dV &= \begin{vmatrix} dx\hat{\mathbf{x}} & dy\hat{\mathbf{y}} & dz\hat{\mathbf{z}} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix} \\ &= dx dy dz \end{aligned} \tag{1}$$

Une possible interprétation calculatoire du volume est de considérer le produit mixte des vecteurs de base du rayon vecteur infinitésimal, autrement dit

$$dV = (dx\hat{\mathbf{x}} \wedge dy\hat{\mathbf{y}}) \bullet dz\hat{\mathbf{z}}$$

Et les vecteurs sont pris dans l'ordre à une permutation cyclique près.

$$\begin{aligned}
dV &= (dy\hat{\mathbf{y}} \wedge dz\hat{\mathbf{z}}) \bullet dx\hat{\mathbf{x}} \\
&= (dz\hat{\mathbf{z}} \wedge dx\hat{\mathbf{x}}) \bullet dy\hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Coordonnées polaires

Méthode intuitive. La méthode intuitive consiste à calculer la surface issue des deux accroissements dr et $d\theta$. On se rend compte que la corde parcourue lors de l'accroissement de θ à $\theta + d\theta$ est une longueur proportionnelle à r , plus précisément $rd\theta$ et que la longueur issue de l'accroissement en r est dr . En effectuant le produit de ces deux quantités, on obtient

$$dA = r dr d\theta$$

Cette méthode, bien que très visuelle, laisse un peu à désirer quant à sa rigueur étant donné que la corde issue de $r + dr$ est $(r + dr)d\theta$ et non $rd\theta$. Une justification souvent rencontrée est que le produit des différentielles $drd\theta$ est d'ordre deux pour un accroissement d'ordre un $d\theta$.

Méthode analytique. La méthode analytique permet de rendre plus rigoureux le calcul de l'élément de surface en se reposant sur le calcul différentiel et le calcul des déterminants. En coordonnées cartésiennes nous avons $dA = dx dy$. On peut exprimer cette quantité également par le déterminant

$$\begin{aligned}
dA &= \begin{vmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{vmatrix} \\
&= dx dy
\end{aligned}$$

En coordonnées polaires, nous avons les relations

$$x = r \cos \theta := \mathcal{X}(r, \theta) \quad (2)$$

$$y = r \sin \theta := \mathcal{Y}(r, \theta) \quad (3)$$

où les fonctions $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont définies afin de distinguer les fonctions $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) des coordonnées x (resp. y). Pour calculer l'élément de surface dA en coordonnées polaires, on considère deux courbes, la courbe ① et la courbe ② (cf. figure 1).

La courbe ① est obtenue à partir des équations 2 et 3 en variant r et en gardant θ fixe. On utilise les symboles δx et δy pour désigner respectivement l'accroissement de x et de y le long de la courbe ① lorsque r varie de la quantité dr .

$$\begin{aligned}
\delta x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial r} dr = \cos \theta dr \\
\delta y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial r} dr = \sin \theta dr
\end{aligned}$$

Le vecteur infinitésimal $d\mathbf{a}_1$ tangent à la courbe ① s'écrit alors

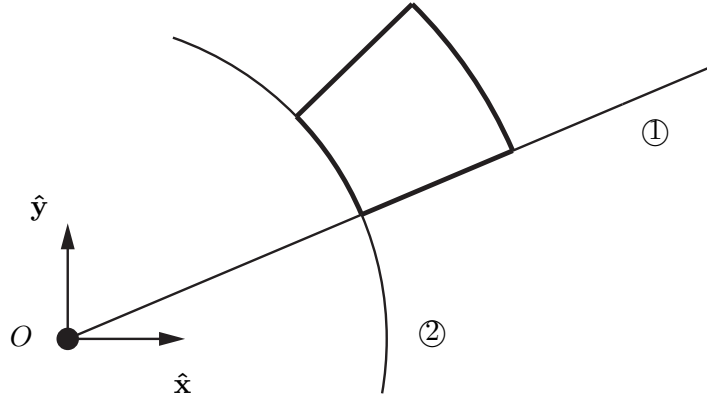


FIGURE 1: Élément de surface en coordonnées polaires. Les courbes ① et ② permettent de calculer les accroissements le long de celles-ci afin de calculer la surface . La courbe ① est obtenue en faisant varier r et en conservant θ constant et la courbe ② est obtenue en faisant varier θ et en gardant r constant.

$$d\mathbf{a}_1 = \delta x \hat{\mathbf{x}} + \delta y \hat{\mathbf{y}}$$

De manière similaire, nous avons des accroissements selon les coordonnées x et y le long de la courbe ② lorsque θ varie et que r reste fixe. On utilisera des symboles différents pour les accroissements selon les coordonnées et on notera $\delta'x$ et $\delta'y$ les accroissements respectifs selon x et y .

$$\begin{aligned} \delta'x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} d\theta = -r \sin \theta d\theta \\ \delta'y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \theta} d\theta = r \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

et le vecteur infinitésimal tangent à la courbe ② s'écrit avec ces différentielles sous la forme

$$d\mathbf{a}_2 = \delta'x \hat{\mathbf{x}} + \delta'y \hat{\mathbf{y}}$$

L'élément de surface infinitésimale est alors donné par le déterminant construit à partir des composantes de $d\mathbf{a}_1$ et $d\mathbf{a}_2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} dA &= \begin{vmatrix} \delta x & \delta y \\ \delta'x & \delta'y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \theta dr & \sin \theta dr \\ -r \sin \theta d\theta & r \cos \theta d\theta \end{vmatrix} \\ &= r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) dr d\theta \\ &= r dr d\theta \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques permettent d'exprimer les coordonnées cartésiennes sous la forme

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}$$

Méthode intuitive. La méthode intuitive suit celle obtenue pour les coordonnées polaires à la différence près qu'il s'agit d'un volume. Comme la coordonnée supplémentaire est z et que celle-ci est dirigée dans un sens orthogonal à l'élément de surface des coordonnées polaires (donné dans notre cas par $\rho d\rho d\phi$), il suffit de multiplier l'élément de surface par dz ce qui donne

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (4)$$

A nouveau, pour les mêmes raisons que pour les coordonnées polaires, la justification de la disparition des différentielles d'ordre 2 n'est pas très transparente. Il serait élégant de procéder de manière systématique afin d'aboutir à la formule (4).

Méthode analytique. Faisons apparaître les fonctions cartésiennes en fonction de coordonnées cylindriques de manière explicite

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi := \mathcal{X}(\rho, \phi, z) \\y &= \rho \sin \phi := \mathcal{Y}(\rho, \phi, z) \\z &= z := \mathcal{Z}(\rho, \phi, z)\end{aligned}$$

Les trois courbes, correspondant à l'accroissement de chacune des coordonnées, sont représentées à la figure 2.

A la courbe ①, on fait correspondre les différentielles δx , δy et δz (qui correspondent aux accroissements des coordonnées cartésiennes lorsqu'on suit la courbe ①). Elles s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \rho} d\rho = \cos \phi d\rho \\ \delta y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \rho} d\rho = \sin \phi d\rho \\ \delta z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \rho} d\rho = 0\end{aligned}$$

et le vecteur infinitésimal tangent à la courbe ① est donné par

$$d\mathbf{a}_1 = \delta x \hat{\mathbf{x}} + \delta y \hat{\mathbf{y}} + \delta z \hat{\mathbf{z}}$$

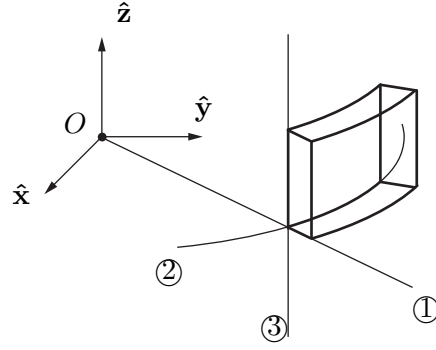


FIGURE 2: Coordonnées cylindriques et courbes pour les accroissements respectifs. La courbe ① est obtenue en faisant varier ρ et en gardant ϕ et z constants. La courbe ② correspond à la variation de ϕ avec ρ et z fixes et finalement ③ est la droite issue de la variation de z en conservant ρ et ϕ constants.

De manière similaire, pour les accroissements selon les courbes ② et ③, nous avons respectivement

$$\begin{aligned}\delta' x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \phi} d\phi = -\rho \sin \phi d\phi \\ \delta' y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \phi} d\phi = \rho \cos \phi d\phi \\ \delta' z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \phi} d\phi = 0\end{aligned}$$

et le vecteur tangent associé à la courbe ② est

$$d\mathbf{a}_2 = \delta' x \hat{\mathbf{x}} + \delta' y \hat{\mathbf{y}} + \delta' z \hat{\mathbf{z}}$$

et pour la dernière courbe, les accroissements infinitésimaux des coordonnées cartésiennes sont

$$\begin{aligned}\delta'' x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} dz = 0 \\ \delta'' y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial z} dz = 0 \\ \delta'' z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z} dz = dz\end{aligned}$$

et le vecteur tangeant associé s'écrit

$$d\mathbf{a}_3 = \delta'' x \hat{\mathbf{x}} + \delta'' y \hat{\mathbf{y}} + \delta'' z \hat{\mathbf{z}}$$

L'élément de volume s'obtient à l'aide du produit mixte (autrement dit par le déterminant) des trois vecteurs infinitésimaux

$$\begin{aligned}
dV &= (d\mathbf{a}_1 \wedge d\mathbf{a}_2) \bullet d\mathbf{a}_3 \\
&= \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta' x & \delta' y & \delta' z \\ \delta'' x & \delta'' y & \delta'' z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos \phi d\rho & \sin \phi d\rho & 0 \\ -\rho \sin \phi d\phi & \rho \cos \phi d\phi & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix} \\
&= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \rho d\rho d\phi dz \\
&= \rho d\rho d\phi dz
\end{aligned}$$

Coordonnées sphériques

L'élément de volume et les courbes génératrices sont données en figure 3. Les expressions des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques sont

$$\begin{aligned}
x &= r \sin \theta \cos \phi = \mathcal{X}(r, \theta, \phi) \\
y &= r \sin \theta \sin \phi = \mathcal{Y}(r, \theta, \phi) \\
z &= r \cos \theta = \mathcal{Z}(r, \theta, \phi)
\end{aligned}$$

La courbe ① est obtenue en faisant varier r et en gardant θ et ϕ constants. Ceci donne pour les accroissements des coordonnées cartésiennes le long de l'accroissement provoqué par dr

$$\begin{aligned}
\delta x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial r} dr = \sin \theta \cos \phi dr \\
\delta y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial r} dr = \sin \theta \sin \phi dr \\
\delta z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial r} dr = \cos \theta dr
\end{aligned}$$

et le vecteur infinitésimal tangent à la courbe ① correspondant s'exprime

$$d\mathbf{a}_1 = \delta x \hat{\mathbf{x}} + \delta y \hat{\mathbf{y}} + \delta z \hat{\mathbf{z}}$$

De manière analogue pour la courbe ②

$$\begin{aligned}
\delta' x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} d\theta = r \cos \theta \sin \phi d\theta \\
\delta' y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \theta} d\theta = r \cos \theta \sin \phi d\theta \\
\delta' z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \theta} d\theta = r \sin \theta d\theta
\end{aligned}$$

avec pour vecteur tangent infinitésimal associé

$$d\mathbf{a}_2 = \delta' x \hat{\mathbf{x}} + \delta' y \hat{\mathbf{y}} + \delta' z \hat{\mathbf{z}}$$

et finalement pour la dernière courbe

$$\begin{aligned}\delta'' x &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \phi} d\phi = -r \sin \theta \sin \phi d\phi \\ \delta'' y &= \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial \phi} d\phi = r \sin \theta \cos \phi d\phi \\ \delta'' z &= \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \phi} d\phi = 0\end{aligned}$$

avec son vecteur infinitésimal associé

$$d\mathbf{a}_3 = \delta'' x \hat{\mathbf{x}} + \delta'' y \hat{\mathbf{y}} + \delta'' z \hat{\mathbf{z}}$$

L'élément de volume s'exprime, comme pour les coordonnées cylindriques, à partir du produit mixte des trois vecteurs infinitésimaux associés à chacune des courbes ①, ② et ③ :

$$\begin{aligned}dV &= (d\mathbf{a}_1 \wedge d\mathbf{a}_2) \bullet d\mathbf{a}_3 \\ &= \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta' x & \delta' y & \delta' z \\ \delta'' x & \delta'' y & \delta'' z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi dr & \sin \theta \sin \phi dr & \cos \theta dr \\ r \cos \theta \cos \phi d\theta & r \cos \theta \sin \phi d\theta & -r \sin \theta d\theta \\ -r \sin \theta \sin \phi d\phi & r \sin \theta \cos \phi d\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\phi dr \\ &= \left[\cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \phi & r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \right] d\theta d\phi dr \\ &= (\cos \theta (r^2 \cos^2 \phi \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + r \sin \theta (r \cos^2 \phi \sin^2 \theta + r \sin^2 \theta \sin^2 \phi)) d\theta d\phi dr \\ &= [r^2 \sin \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^3 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)] d\theta d\phi dr \\ &= (r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta) d\theta d\phi dr \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta d\phi dr \\ &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr\end{aligned}$$

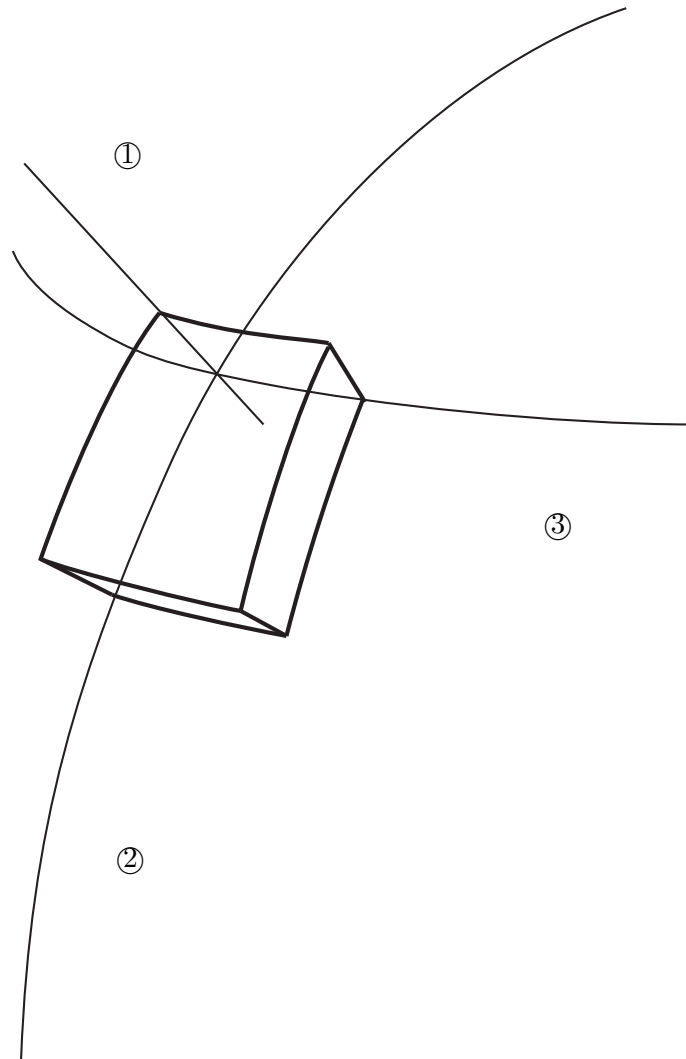


FIGURE 3: Élément de volume en coordonnées sphériques. La courbe ① est celle obtenue en variant r et en gardant ϕ et θ fixes. La courbe ② est celle obtenue en variant θ et en conservant ϕ et r constants et, finalement, la courbe ③ est obtenue en variant ϕ et en gardant θ et r constants.