

Complément

Vecteurs liés et vecteurs glissants

En algèbre linéaire, tout vecteur est libre. Il n'y a pas la notion du point d'application du vecteur. En mécanique, deux notions supplémentaires sont importantes.

Définition 1 (VECTEUR LIÉ ET VECTEUR GLISSANT)

1. Vecteurs liés : On appelle vecteur lié, tout vecteur auquel on associe le point d'origine du vecteur. Il n'est pas possible de déplacer les vecteurs liés sans en changer la nature.
2. Vecteurs glissants : On introduit une équivalence entre tous les vecteurs liés situés sur la droite de support d'un vecteur lié donné. Deux vecteurs liés situés sur la même droite de support et de même vecteur (considéré en tant que vecteurs libres) appartiennent à la même classe. Ils représentent ainsi le même vecteur glissant bien qu'ils soient différents en tant que vecteurs liés.

Notation

Soit le vecteur $\mathbf{v}_A$ lié au point A et le vecteur $\mathbf{v}_B$ lié au point B . Pour souligner la nature liée des vecteurs, il est utile de garder trace de manière explicite du point d'application, étant donné qu'il est possible de translater un vecteur libre sans en changer la nature. Par contre, une telle translation affecte le vecteur lié. Ainsi, on notera les deux vecteurs liés sous la forme

$$\{(A, \mathbf{v}_A), (B, \mathbf{v}_B)\}$$

Il n'est pas possible de translater le vecteur glissant dans une direction autre que celle de la droite de support du vecteur. On utilisera la notation

$$\overbrace{(A, \mathbf{v}_A)}$$

pour désigner un vecteur glissant associé au vecteur lié $(A, \mathbf{v}_A)$.

Illustration

La figure 1 illustre le concept de vecteur glissant.

En mécanique, plusieurs effets physiques sont traduits fidèlement soit par des vecteurs liés, soit par des vecteurs glissants, soit par des vecteurs libres. Souvent, ces notions sont sous-entendues et non explicitement nommées, ce qui conduit à une difficulté importante liée à l'étude de la mécanique théorique.

Quelques exemples que l'on rencontre fréquemment :

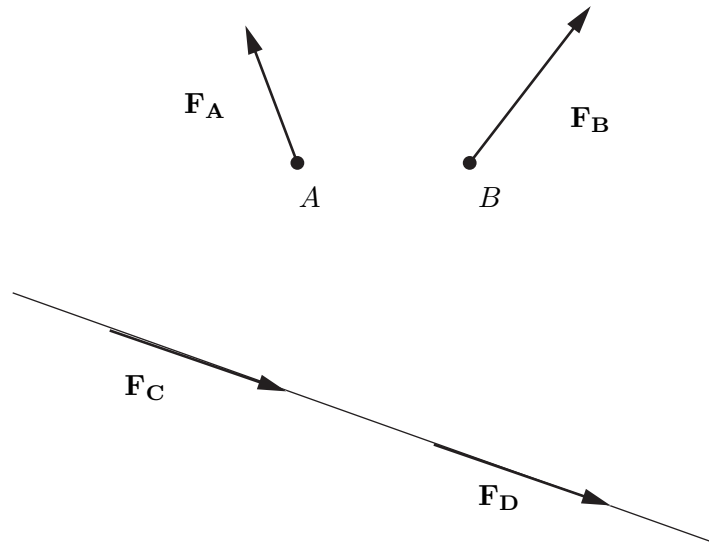


FIGURE 1: Le vecteur $\mathbf{F}_A$ est lié au point A et le vecteur $\mathbf{F}_B$ est lié au point B . Deux vecteurs liés situés sur la droite de support de leur vecteur appartiennent à la même classe d'équivalence qu'un certain vecteur glissant. Ainsi, comme $\mathbf{F}_C$ et $\mathbf{F}_D$ sont identiques en tant que vecteurs libres et qu'ils ont même droite de support, ils représentent le même vecteur glissant.

1. La notion de force. La force est représentée mathématiquement par un vecteur et elle agit sur un point. Elle est parfois considérée comme un vecteur lié, parfois comme un vecteur libre, en fonction de la propriété soulignée. Par exemple, la résultante des forces qui s'applique à un corps solide devient un vecteur libre. Lors d'équilibre d'objets, il est primordial de prendre en compte le point d'application de la force. Ainsi, la force appliquée en un point particulier est un vecteur lié. Lors d'un équilibre d'un solide, l'équilibre n'est pas rompu si un vecteur lié est translaté le long de la droite de support en conservant à la fois son sens et son module. Ainsi, dans ce cas, on peut remplacer les vecteurs liés par des vecteurs glissants associés sans changer la nature de l'équilibre (nous reviendrons sur cet exemple).
2. La notion de vitesse instantanée d'un point d'un solide est un vecteur lié au point.
3. La vitesse instantanée de rotation du solide est un vecteur libre si on ne s'intéresse pas au lieu des points qui subissent une translation pure uniquement. Il est un vecteur glissant si on s'intéresse à l'axe instantané de rotation. L'axe instantané de rotation est le lieu des points qui subissent une translation instantanée sans rotation instantanée. L'axe de rotation est la droite de support du vecteur glissant caractérisant la rotation instantanée.
4. Un point matériel plongé dans le champ de gravité constant subit une force. Cette force peut être considérée comme un vecteur glissant. Le point matériel subit la même force si celui-ci est translaté le long de la droite de support du vecteur.

Solide

Soit un l'exemple d'un solide qui subit trois forces $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{F}_C$ en des points A , B et C (respectivement).

Si les trois forces sont sur la droite de support commune, elles sont les trois associées au même vecteur glissant à condition qu'elles aient les trois le même module $\|\mathbf{F}_A\| = \|\mathbf{F}_B\| = \|\mathbf{F}_C\|$ et de même sens. En d'autres termes, les vecteurs liés sont identiques en tant que vecteurs libres et tous situés sur la même droite de support.

Opérations sur les vecteurs glissants

On peut effectuer les opérations suivantes sur les vecteurs liés représentant les vecteurs glissants associés sans changer la nature des vecteurs glissants. Ils sont alors équivalents. Nous suivons P. Janssens¹, p. 31, à la lettre : "...ainsi on peut

1. faire glisser un vecteur sur son support ;
2. introduire, *sur un même support*, deux vecteurs opposés ;
3. lorsque plusieurs vecteurs ont leurs supports concourants, les remplacer par leur résultante *placée au point commun* ;
4. inversement, remplacer un vecteur par deux (ou plusieurs) autres vecteurs concourants, dont le vecteur donné est la résultante. Le point de concours se trouve obligatoirement sur le support du vecteur considéré."

Vecteurs glissants parallèles

Deux vecteurs glissants parallèles sont réduits par équivalence pour constituer un vecteur glissant équivalent. Les étapes sont décrites ci-dessous et ces étapes sont représentées à la figure 2.

1. Deux vecteurs glissants parallèles sont représentés avec leurs droites de support.
2. La droite perpendiculaire reliant les deux droites de support est représentée. N'importe quelle droite perpendiculaire fait l'affaire. Les vecteurs sont alors glissés de telle sorte que leurs points d'application se situent à l'intersection des droites correspondantes.
3. On ajoute une paire de vecteur glissants opposés dont la droite de support est la perpendiculaire et on glisse les vecteurs associés sur les deux points d'intersection précédents.
4. On construit les parallélogrammes associés aux vecteurs.
5. La diagonale des parallélogrammes rend possible l'addition vectorielle.
6. L'intersection des droite de support des vecteurs obtenus par les deux parallélogramme donne un nouveau point de liaison.
7. On reporte les vecteurs au point de liaison et on effectue leur addition vectorielle.
8. Le nouveau vecteur obtenu est parallèle aux deux vecteurs initiaux mais il est situé sur une nouvelle droite de support. Ceci conduit à un nouveau vecteur glissant équivalent aux deux vecteurs initiaux.

1. P. Janssens, *Cours de mécanique rationnelle, vol. 1*, Dunod, 1967. Paragraphe 1.1.2 en particulier p. 28 - 38.

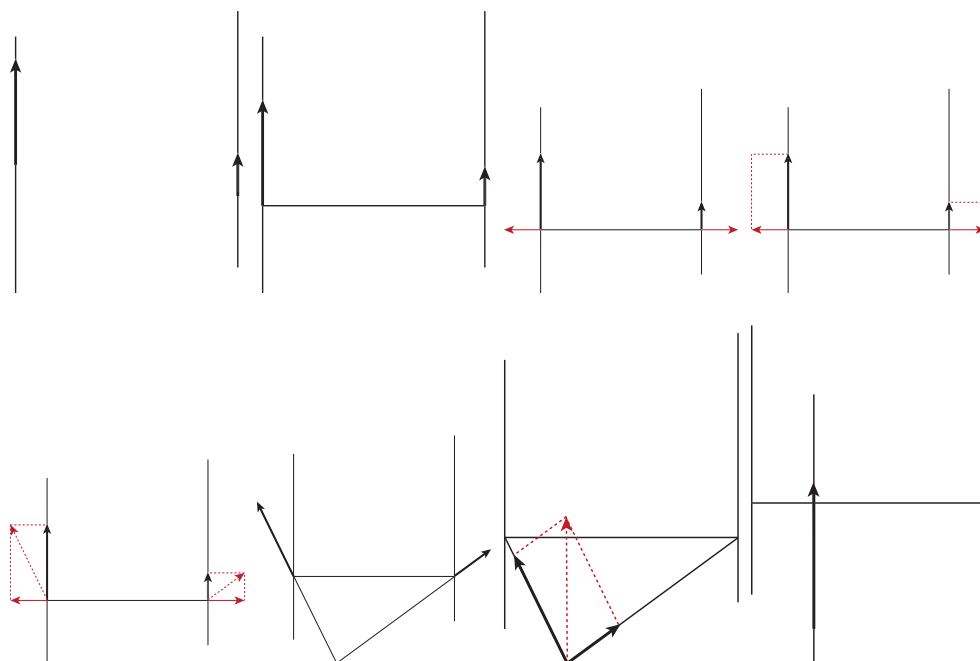


FIGURE 2: Deux vecteurs glissants parallèles sont réduit par équivalence à un vecteur glissant unique. Les étapes de l'équivalence sont données dans le corps du texte.

Addition de deux couples de vecteurs glissants

L'addition de deux couples de vecteurs glissants est représentée à la figure 3. Dix étapes sont illustrées :

1. On commence par déterminer l'intersection des plans de support des deux couples de vecteurs glissants. Ceci est possible car chaque couple définit un plan. Le cas de deux plans non confondus est illustré.
2. Le deuxième couple de vecteurs glissants est transformé en un couple de vecteurs liés sur des points de l'axe d'intersection. Ceci est obtenu par la méthode de translation de couple de vecteurs glissants. Pour se faire glisser le vecteur sur l'intersection de sa droite de support et de la droite issue de l'intersection des plans. Ajouter un vecteur glissant nul quelconque aligné avec la droite d'intersection. Additionner les vecteurs au point d'intersection. Effectuer cette construction aux deux points d'intersection pour obtenir un couple équivalent à celui représenté. Le choix du vecteur nul (deux vecteurs opposés) n'influence pas l'équivalence du couple obtenu. Pour traduire l'intersection, on utilise la règle du bras de levier, formule obtenue lors de l'addition de vecteurs glissants parallèles. Cette formule fait l'objet d'un exercice (cf. Série 1).
3. On peut alors supprimer le couple initial de vecteurs glissants puisque le nouveau couple lui est équivalent.
4. L'opération est répétée pour l'autre couple initial de vecteurs glissants.
5. On obtient ainsi un couple de vecteurs liés dont les deux vecteurs sont liés au même point de l'axe d'intersection des plans.

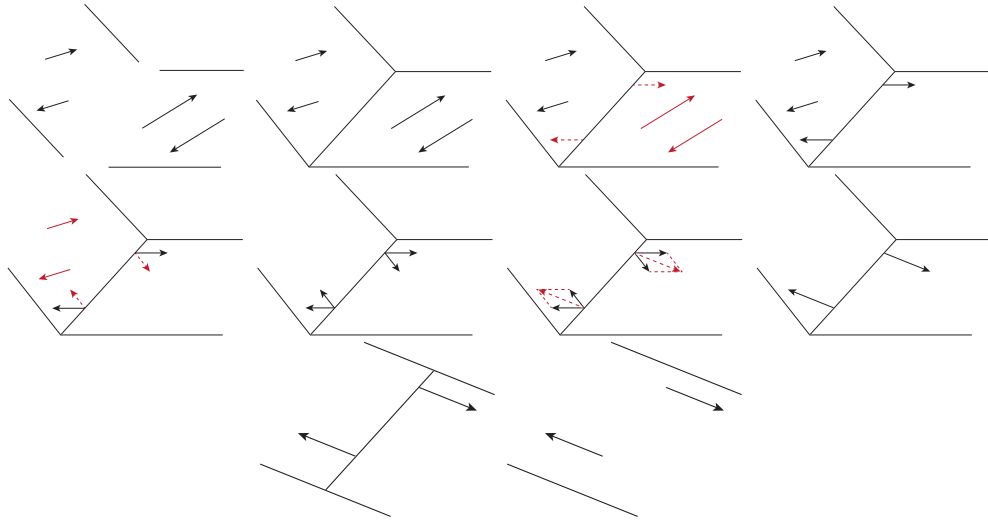


FIGURE 3: Etapes lors de l'addition de deux couples de vecteurs glissants. Dix étapes sont illustrées et correspondent aux chiffres de 1 à 10 donnés dans le corps du texte.

6. On procède alors à l'addition vectorielle des vecteurs liés au même point.
7. Un couple de vecteurs liés à l'axe de rotation résulte de l'addition vectorielles des vecteurs liés.
8. Le couple de vecteurs liés appartient à un nouveau plan qui représenté et qui contient l'axe d'intersection.
9. En faisant disparaître l'axe d'intersection et le plan, le couple de vecteurs glissants cherché en résulte.

Tout au long des dix étapes, nous avons utilisé les opérations de l'équivalence décrites par P. Janssens (données plus haut).

Rotation de couple de vecteurs glissants

Grâce à ces opérations élémentaires, il est possible de réduire un ensemble de vecteurs glissants à deux entités qui en résument les propriétés. Nous avons le théorème central associé aux vecteurs glissants et liés :

Théorème 1 (THÉORÈME FONDAMENTAL - RÉDUCTION DU TORSEUR)² *Un ensemble de vecteurs constitués de vecteurs liés qui se comportent comme des vecteurs glissants et de vecteurs glissants peut toujours se ramener par équivalence obtenues par les opérations élémentaires mentionnées ci-dessus à*

- *un vecteur libre appelé résultante,*
- *un couple de vecteurs glissants qui dépendent du point de réduction choisi pour établir l'équivalence.*

2. Une démonstration complète est disponible dans N.G. Chetaev, *Mécanique rationnelle*, Ed. MIR, Moscou.

Ceci nécessite la définition de couple de vecteurs glissants

Définition 2 (COUPLE DE VECTEURS GLISSANTS) *Deux vecteurs glissants situés sur des droites parallèles et dont les vecteurs sont opposés est un couple de vecteurs glissants.*

On peut remarquer les propriétés suivantes

- Un couple de vecteurs glissants ont leurs droites de support parallèle (par définition).
- Comme les deux vecteurs sont opposés, ils ont même module et sont de sens contraire.

Invariants

Les couples de vecteurs glissants possède les invariants suivants :

1. Le plan contenant les deux droites des vecteurs glissants.
2. La distance entre les droite, appelée bras de levier.
3. La surface du parallélogramme construit à partir des points de liaisons et des vecteurs liés associés.
4. L'orientation du "sens" de rotation que donne le couple.

Par exemple à la figure 5, la surface du parallélogramme reste identique quel que soit la position A et B sur leur droite respective.

La construction permettant d'obtenir l'invariance par rotation en utilisant les relations d'équivalence est donnée à la figure 4.

Calculs

Les couples de glisseurs (vecteurs glissants) s'additionnent comme des vecteurs à condition d'introduire le produit vectoriel et d'associer à

$$\{(A, \mathbf{F}_A), (B, \mathbf{F}_B)\} \quad (1)$$

avec $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$, le vecteur

$$\mathbf{M} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F}_A = \mathbf{BA} \wedge \mathbf{F}_B$$

Remarque : La réduction d'un ensemble de vecteurs liés donnés dépend du point de réduction choisi et conduit à une résultante $\mathbf{R}$ qui est un vecteur libre et un ensemble de couple de vecteurs glissants. Si on représente $\mathbf{M}$ comme l'addition des couples de vecteurs glissants (cf. Figure 3), l'addition dépend du point de réduction choisi. En fonction du point de réduction, on obtient un champ de vecteurs liés $(P, \mathbf{M}_P)$ correspondant à la somme des couples de vecteurs glissants obtenus par réduction au point P . On a la formule suivante :

Théorème 2 (BABAR - THM. FONDAMENTAL)

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}$$

avec

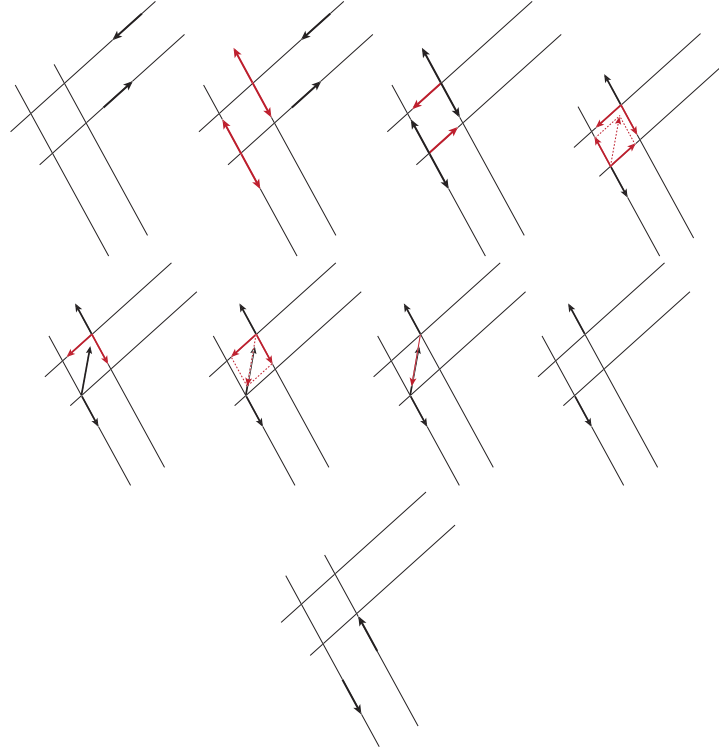


FIGURE 4: Etapes pour démontrer l'équivalence par rotation d'un couple de vecteurs glissants.

- $\mathbf{M}_B$ correspond à la somme des couples de vecteurs glissants issus de la réduction au point B de l'ensemble des vecteurs liés.
- $\mathbf{M}_A$ correspond à la somme des couples de vecteurs glissants issus de la réduction au point A de l'ensemble des vecteurs liés.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_B &= \sum_{\alpha} \mathbf{B}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
 &= \sum_{\alpha} (\mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{P}_{\alpha}) \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{A} \wedge \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \mathbf{A}\mathbf{P}_{\alpha} \wedge \mathbf{F}_{\alpha} \\
 &= \mathbf{B}\mathbf{A} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_A \\
 &= \mathbf{M}_A + \mathbf{B}\mathbf{A} \wedge \mathbf{R}
 \end{aligned}$$

Remarque : Le théorème de réduction introduit une interprétation en termes de champ. Un ensemble de vecteurs liés ou glissants dont seul la propriété en tant que vecteurs glissants est d'intérêt peut être remplacé par un champ de moments et une résultante. Le champs de moment et la résultante obéissent à la règle de transfert BABAR. Ce champ de moments est entièrement spécifié par trois éléments : un point arbitraire, le moment en ce point et une résultante. Connaissant ces trois quantités, on peut obtenir le moment en n'importe quel

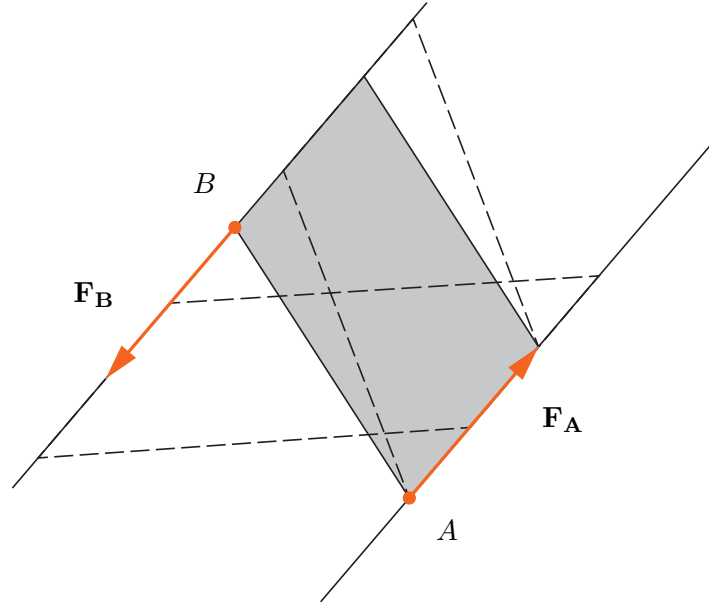


FIGURE 5: La surface du couple (1). Cette surface reste identique quelles que soient les positions de A et B le long de leur droite de support puisque les vecteurs sont glissants avec les vecteurs libres $\mathbf{F}_A$ et $\mathbf{F}_B$ opposés, i.e. $\mathbf{F}_A = -\mathbf{F}_B$.

point. Cette entité constituée d'un ensemble fini ou infinis de vecteurs glissants est appelée un *torseur*. Tout au long du cours de mécanique, nous verrons trois torseurs :

- Le torseur de force. Champ de moments : $\mathbf{M}_A$ (le moment de force) ; résultante : $\mathbf{R}$ (la résultante des forces, c.-à-d. la sommes de toutes les forces). Le transfert :

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}$$

- Le torseur cinématique. Champ de moments : $\mathbf{v}_A$ (vitesse instantanée du point) ; résultante : ω (la vitesse instantée de rotation). Le transfert :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{BA} \wedge \omega$$

- Le torseur cinétique. Champ de moments : $\mathbf{L}_A$ (le moment cinétique) ; résultante : $\mathbf{p}$ (la quantité de mouvement complète). Le transfert :

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{p}$$

ATTENTION : Ne pas appliquer les formules de transfert hors contexte et considérer toujours leur validité. Par exemple, la formule de transfert des vitesses est valable pour un champ de vitesse d'un solide par exemple et pas pour une distributions quelconque des vitesses. La même précaution vaut pour les autres formules. Lorsqu'on à un nombre fini de points matériels et que l'on calcule les moments, on met en jeu immédiatement l'image mentale d'un champ de moments et on peut en tirer une information pour l'évolution future de l'ensemble des points matériels. Il faut se souvenir que l'on ne met pas en jeu toutes les possibilités de cette

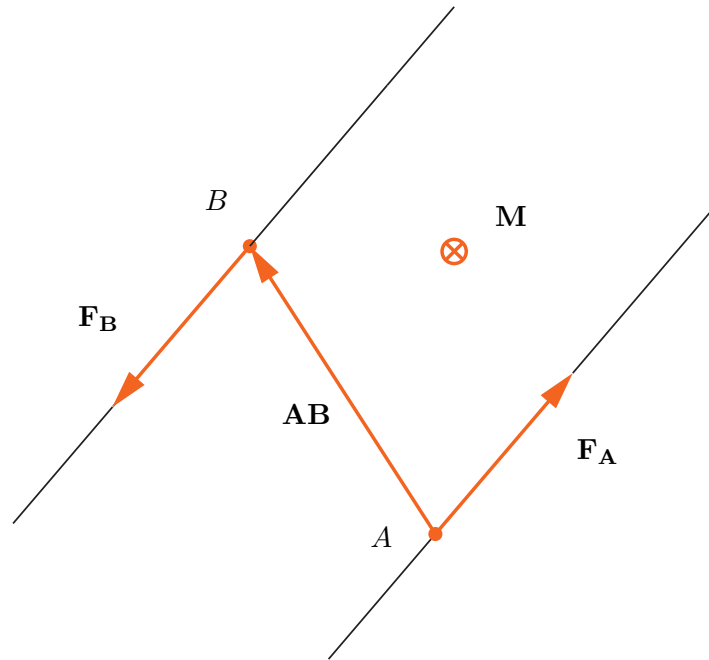


FIGURE 6: Un vecteur $\mathbf{M} = \mathbf{AB} \wedge \mathbf{F_A}$ est associé au couple de vecteurs parallèles (1). Ce vecteur est perpendiculaire au plan des vecteurs parallèles et de norme égale à la surface de n'importe quel parallélogramme construit à partir des vecteurs du couple. La surface est orientée et dans ce cas-ci, le vecteur $\mathbf{M}$ entre dans la feuille. Le module $\|\mathbf{M}\|$ est égal à l'aire d'un des parallélogrammes représentés à la figure 5.

évolution. Un exemple simple est de calculer les moments de forces d'un système de points matériels quelconques (non nécessairement formant un solide). Une erreur serait de dire, si la résultante des forces et le champ de moment sont nuls, alors l'ensemble de points matériels est à l'équilibre. Ceci est faux car les points peuvent glisser le long des vecteurs glissants sans changer ni la résultante ni le champ de moment issus de la réduction. La conclusion est juste au contraire, et caractérise l'équilibre parfaitement dans le cas d'un solide. Nous reviendrons abondamment sur ce sujet par la suite. Il est cependant important d'attirer votre attention sur la notion du champs de moments très tôt dans le cours, et il est bon de revenir sur cette explication au fur et à mesure que vous avancez dans le cours.