Corrigé Série 13 : Dynamique des solides

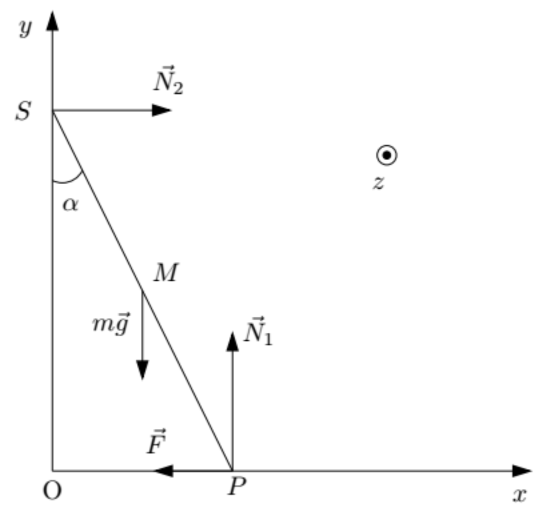
1 L'échelle

On considère le système échelle, vu du référentiel du sol et du mur. On choisit un repère cartésien avec l'axe x horizontal et l'axe y vertical, comme indiqué sur le dessin.

Les forces qui s'appliquent sur l'échelle sont

- Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{e}_y$, vertical, dirigé vers le bas. Son point d'application est au centre de masse (milieu) de l'échelle.
- La force de soutien du sol $\vec{N}_1 = N_1\hat{e}_y$, perpendiculaire au sol.
- La force de soutien du mur $\vec{N}_2 = N_2\hat{e}_x$, perpendiculaire au mur.
- La force de frottement entre le pied de l'échelle et le sol $\vec{F}$, parallèle au sol. Elle est dirigée vers la gauche car le pied de l'échelle tend à glisser vers la droite : $\vec{F} = -F\hat{e}_x$ s'oppose à cette glissade.

A noter que mg, N_1, N_2 et F désignent les normes des vecteurs correspondants.



Lorsque $\alpha < \alpha_{\max}$, le sytème est à l'équilibre, la deuxième équation de Newton s'écrit : $m\vec{g}+\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{F} = 0$. En projection sur le repère Oxy du dessin, on a

$$\text{Sur } x : -F + N_2 = 0 \tag{1}$$
$$\text{Sur } y : N_1 - mg = 0 \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) forment un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour résoudre complètement le problème, il faut également utiliser le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \Sigma\vec{M}_O.$$

Ici l'échelle est immobile, on a simplement $\Sigma\vec{M}_O = \vec{0}$. Un moment de force est défini par rapport à un point quelconque du référentiel. Un choix possible est le milieu de l'échelle M. Dans ce cas, la somme des moments s'écrit

$$\Sigma\vec{M}_M = \overrightarrow{MP} \wedge \vec{N}_1 + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{MS} \wedge \vec{N}_2 \tag{3}$$

où $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MS}$ désignent les vecteurs allant respectivement du milieu de l'échelle à son pied et à son sommet ; la norme de ces deux vecteurs est $\frac{L}{2}$. Tous les vecteurs entrant en jeu dans (3) sont dans le plan contenant l'échelle et le mur (le plan de la feuille sur notre dessin). Le moment de chaque force, et donc la somme des moments, est orthogonal à ce plan, et donc parallèle à l'axe z.
Rappel : soit $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, la norme de $\vec{w}$ est donnée par $||\vec{w}|| = ||\vec{u}||.||\vec{v}|| \sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. On a

$$\Sigma M_M = -\frac{L}{2}N_2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) - \frac{L}{2}F\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) + \frac{L}{2}N_1\sin\alpha$$
$$= \frac{L}{2}\left[-N_2\cos\alpha - F\cos\alpha + N_1\sin\alpha\right] = 0.$$

Le signe de chaque terme est donné par la règle de la main droite. En utilisant les relations (1) et (2), on obtient

$$\Sigma M_M = \frac{L}{2}\left[-F\cos\alpha - F\cos\alpha + mg\sin\alpha\right] = -LF\cos\alpha + \frac{L}{2}mg\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg\tan\alpha}{2}. \tag{4}$$

Ceci reste vrai tant que

$$F < F^{\max} = \mu N_1,$$

auquel cas le pied de l'échelle se met à glisser. A la limite, on a

$$F^{\max} = \frac{mg\tan\alpha_{\max}}{2} = \mu mg$$

$$\Rightarrow \alpha_{\max} = \arctan(2\mu). \tag{5}$$

Remarque : on arrive au même résultat, en prenant un autre point de référence pour le calcul des moments. Par exemple, la somme des moments calculés par rapport au point P du pied de l'échelle nous donne

$$\Sigma\overrightarrow{M}_P = \overrightarrow{PM}\wedge m\vec{g} + \overrightarrow{PS}\wedge\vec{N}_2. \tag{6}$$

La projection sur l'axe z est

$$\Sigma M_P = \frac{L}{2}mg\sin\alpha - LN_2\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = 0, \tag{7}$$

qui devient, en utilisant l'équation (1),

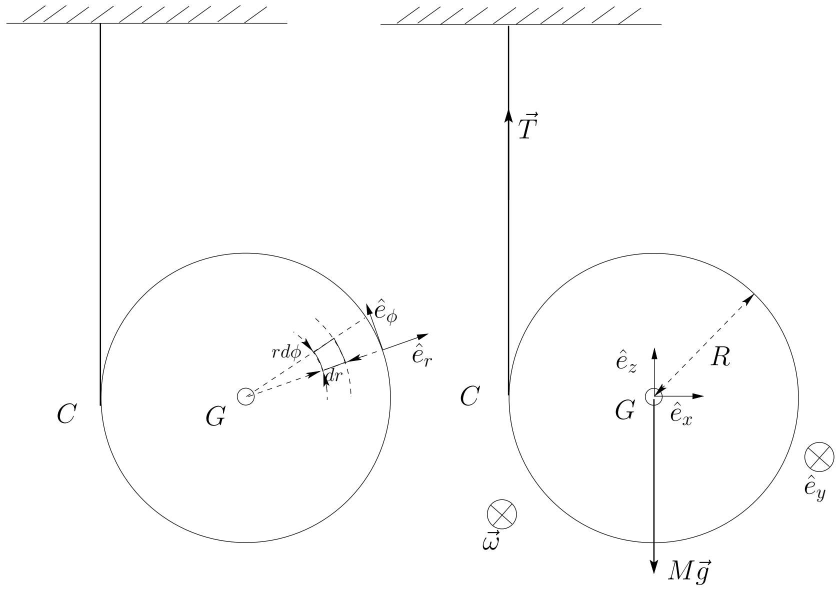
$$F = \frac{mg\tan\alpha}{2}.$$

Nous avons donc obtenu le même résultat que (4), bien que les forces qui contribuent à un moment non nul ne soient pas les mêmes.

2 Yoyo

a) En remarquant que le disque est un cas particulier du cylindre où la hauteur de ce dernier est nulle, on déduit du résultat du cours que le moment d'inertie d'un disque par rapport à son axe de symétrie de révolution est donné par

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}MR^2\,. \tag{8}$$



b) Pour résoudre ce problème, on va utiliser les équations du mouvement du yoyo. Les forces qui s'appliquent sur le yoyo sont son poids $\vec{P} = M\vec{g}$, dirigé vers le bas, et la tension dans le fil $\vec{T}$, dirigée vers le haut. Les équations du mouvement sont données d'une part par le théorème du centre de masse (deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse) qui projeté sur $\hat{e}_z$ donne

$$-Ma_G = -Mg + T \,, \tag{9}$$

et d'autre part par le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_{\text{disque}}\dot{\omega}\hat{e}_y = \Sigma\vec{M}_G = \overrightarrow{GG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{GC} \wedge \vec{T} \,.$$

qui projeté sur $\hat{e}_y$ donne

$$I_{\text{disque}}\dot{\omega} = RT \,. \tag{10}$$

Tous les points du fil ont une vitesse nulle y compris donc au point de contact C ($v_C = 0$). On a ainsi $\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}$ ($\vec{v}_G$ pointe bien vers le bas) donc la vitesse et l'accélération angulaire du disque sont reliées par

$$v_G = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_G}{R} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a_G}{R} \,. \tag{11}$$

En combinant les équations (8), (10) et (11), on obtient

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a_G}{R} = R(Mg - Ma_G) \,.$$

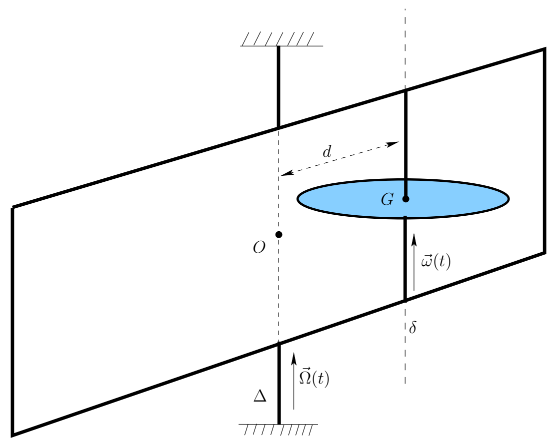
En résolvant pour a_G, on trouve

$$a_G = \frac{2}{3}g \,. \tag{12}$$

Et par substitution dans l'équation (9), on obtient :

$$T = M(g - a_g) = M\left(g - \frac{2}{3}g\right) = \frac{Mg}{3} \,. \tag{13}$$

3 Volant et châssis



a) Le volant tourne autour d'un axe principal d'inertie avec une vitesse angulaire de rotation totale $\vec{\omega}+\vec{\Omega}$; son moment cinétique par rapport au point G vaut ainsi

$$\vec{L}_{\mathrm{v},G} = I_{\mathrm{v},\delta}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\,. \tag{14}$$

On obtient son moment cinétique par rapport à O par le théorème du transfert :

$$\vec{L}_{\mathrm{v},O} = \vec{L}_{\mathrm{v},G} + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G = I_{\mathrm{v},\delta}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG}\wedge m\vec{v}_G\,. \tag{15}$$

Le point O étant immobile et les points G et O appartenant tous deux au châssis, leurs vitesses doivent satisfaire

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG}\,. \tag{16}$$

Le châssis tourne également autour d'un axe principal d'inertie et son moment cinétique par rapport à O vaut

$$\vec{L}_{\mathrm{c},O} = I_{\mathrm{c},\Delta}\,\vec{\Omega}\,. \tag{17}$$

En combinant les relations ci-dessus, le moment cinétique total du système volant+châssis par rapport à O vaut alors :

$$\begin{aligned}
\vec{L}_{\mathrm{tot},O} = \vec{L}_{\mathrm{c},O} + \vec{L}_{\mathrm{v},O} &= I_{\mathrm{c},\Delta}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},\delta}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + \overrightarrow{OG}\wedge m(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG})\\
&= I_{\mathrm{c},\Delta}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},\delta}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + m\left(\overrightarrow{OG}^2\vec{\Omega} - (\overrightarrow{OG}\cdot\vec{\Omega})\,\overrightarrow{OG}\right)\\
&= I_{\mathrm{c},\Delta}\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},\delta}\,(\vec{\omega}+\vec{\Omega}) + md^2\vec{\Omega}\\
\Rightarrow \vec{L}_{\mathrm{tot},O} &= (I_{\mathrm{c},\Delta} + I_{\mathrm{v},\delta} + md^2)\,\vec{\Omega} + I_{\mathrm{v},\delta}\,\vec{\omega}\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

b) Les seules forces horizontales extérieures au système volant+chassis s'appliquent sur l'axe du chassis et donc le système ne subit aucun moment de force extérieur vertical. La composante verticale du moment cinétique total (par rapport à n'importe quel point du référentiel) est ainsi constante. Le moment cinétique total par rapport au point O, donné par l'équation (18), est vertical et est donc un vecteur constant au cours du temps. En particulier, on a

$$\vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_1) = \vec{L}_{\mathrm{tot},O}(t_0)\,,$$

ce qui donne

$$(I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2)\,\vec{\Omega}(t_1) + I_{v,\delta}\,\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} = (I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2)\,\underbrace{\vec{\Omega}(t_0)}_{=\vec{0}} + I_{v,\delta}\,\vec{\omega}_0\,,$$

et donc

$$\vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{19}$$

c) Les forces de freinage sur le châssis sont extérieures au système volant+châssis ; elles exercent un moment vertical qui modifie le moment cinétique total entre t_1 et t_2. Considérons uniquement le volant : entre les temps t_1 et t_2, ce dernier subit son poids vertical vers le bas, et trois autres forces exercées par le châssis : une force de soutien vers le haut (compensant le poids), une force centripète (dans la direction de $\overrightarrow{GO}$), et une force horizontale de direction opposée à $\vec{v}_G$. Cette force s'applique au point G et va le freiner jusqu'à ce qu'il s'immobilise. Aucune de ces forces n'a un moment par rapport au point G, et donc le moment cinétique du volant par rapport au point G reste constant,

$$\vec{L}_{v,G}(t_2) = \vec{L}_{v,G}(t_1)\,,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} I_{v,\delta}\big(\vec{\omega}(t_2) + \underbrace{\vec{\Omega}(t_2)}_{=\vec{0}}\big) &= I_{v,\delta}\big(\underbrace{\vec{\omega}(t_1)}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}(t_1)\big)\,,\\ I_{v,\delta}\,\vec{\omega}(t_2) &= I_{v,\delta}\,\vec{\Omega}(t_1)\,, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant l'équation (19) :

$$\vec{\omega}(t_2) = \vec{\Omega}(t_1) = \frac{I_{v,\delta}}{I_{c,\Delta} + I_{v,\delta} + md^2}\,\vec{\omega}_0\,. \tag{20}$$

d) Comme vu au cours, un point C sur l'axe instantané de rotation du volant doit satisfaire à

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GC} = \frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\wedge\vec{v}_G}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2} &= \frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OG})}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2}\\ &= \frac{((\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\overrightarrow{OG})\,\vec{\Omega} - ((\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\vec{\Omega})\,\overrightarrow{OG}}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2}\\ &= -\frac{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})\cdot\vec{\Omega}}{(\vec{\omega}+\vec{\Omega})^2}\,\overrightarrow{OG} = -\frac{(\omega+\Omega)\Omega}{(\omega+\Omega)^2}\,\overrightarrow{OG} = -\frac{\Omega}{\omega+\Omega}\,\overrightarrow{OG}\,, \end{aligned} \tag{21}$$

et donc

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} = \left(1 - \frac{\Omega}{\omega+\Omega}\right)\overrightarrow{OG} = \frac{\omega}{\omega+\Omega}\,\overrightarrow{OG}\,. \tag{22}$$

L'axe de rotation instantané du volant est vertical et passe par le point C situé entre les points O et G à une distance $\omega d/(\omega+\Omega)$ du point O. Quand $\vec{\Omega}(t) = \vec{0}$, par exemple aux temps t_0 ou t_2, $C = G$ et l'axe de rotation instantané est δ ; quand $\vec{\omega}(t) = \vec{0}$, par exemple au temps t_1, $C = O$ et l'axe de rotation instantané est Δ.

4 Tige en rotation

Les forces qui s'appliquent sur la tige sont son poids $M\vec{g}$, appliqué à son centre de masse G situé à une distance $L/2$ du point O, et une force de soutien $\vec{T}$ d'orientation inconnue au point O.
Le théorème du centre de masse s'exprime comme

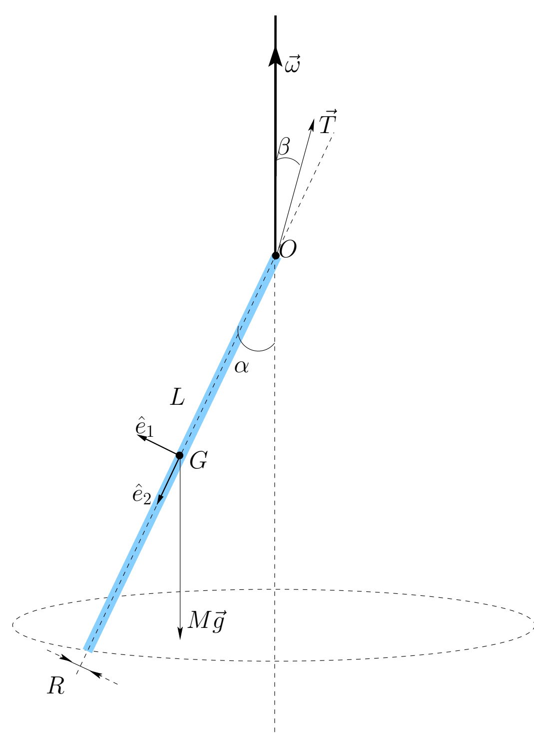
$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}_G\,, \tag{23}$$

où $\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de masse. Puisque le mouvement de G est circulaire uniforme, son accélération est horizontale et de norme $a_G = \frac{v_G^2}{r_G} = \omega^2 r_G = \omega^2 \frac{L}{2}\sin\alpha$. La projection sur des axes verticaux et horizontaux dans le plan de la tige et de l'axe de rotation donne

$$\begin{aligned} T\cos\beta &= Mg\,, && (24)\\ T\sin\beta &= M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\,, && (25)\end{aligned}$$

où l'angle β est l'angle formé par la force $\vec{T}$ et la verticale. On note ici que $\vec{T}$ est dans le plan formé par $\vec{\omega}$ et $\overrightarrow{OG}$, puisque ni le poids de la tige ni l'accélération de son centre de masse n'ont de composante perpendiculaire à ce plan.
Pour exprimer le moment cinétique, on choisit un repère d'inertie au point G défini par $\hat{e}_2 \equiv \frac{\overrightarrow{OG}}{|\overrightarrow{OG}|}$, $\hat{e}_3 \equiv \frac{\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2}{|\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2|}$ et $\hat{e}_1 \equiv \hat{e}_2 \wedge \hat{e}_3$.
Dans ce repère, la vitesse angulaire s'écrit

$$\vec{\omega} = \omega\sin\alpha\,\hat{e}_1 - \omega\cos\alpha\,\hat{e}_2\,. \tag{26}$$



Le moment cinétique $\vec{L}_G$ est donné par

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}\,. \tag{27}$$

La tige est un cylindre de longueur L et de rayon R, et donc son tenseur d'inertie vaut (pour le repère choisi)

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \end{pmatrix} . \tag{28}$$

En injectant les expressions (26) et (28) dans l'équation (27), on obtient :

$$\vec{L}_G = \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega \sin\alpha \hat{e}_1 - \frac{1}{2}MR^2\omega\cos\alpha\hat{e}_2 . \tag{29}$$

En utilisant la formule de Poisson $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$, on trouve la dérivée par rapport au temps de $\vec{L}_G$:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \left(\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3 - \frac{1}{2}MR^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\,\hat{e}_3 \\ &= \left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3 \end{aligned} \tag{30}$$

Le théorème du moment cinétique par rapport au centre de masse s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \overrightarrow{GO} \wedge \vec{T} + \underbrace{\overrightarrow{GG}}_{=\vec{0}} \wedge M\vec{g} . \tag{31}$$

Sa projection sur $\hat{e}_3$ donne :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}T\sin(\alpha-\beta) = \frac{L}{2}(T\cos\beta\sin\alpha - T\sin\beta\cos\alpha) . \tag{32}$$

En utilisant les équations (24) et (25), on trouve une relation qui ne dépend pas de T :

$$\left(\frac{1}{12}ML^2 - \frac{1}{4}MR^2\right)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{L}{2}(Mg\sin\alpha - M\omega^2\frac{L}{2}\sin\alpha\cos\alpha) . \tag{33}$$

Les solutions de cette équation sont soit $\sin\alpha = 0$, soit

$$\cos\alpha = \frac{6Lg}{(4L^2 - 3R^2)\omega^2} . \tag{34}$$

Cette deuxième solution n'existe que si $\omega^2 > \frac{6Lg}{4L^2-3R^2}$.