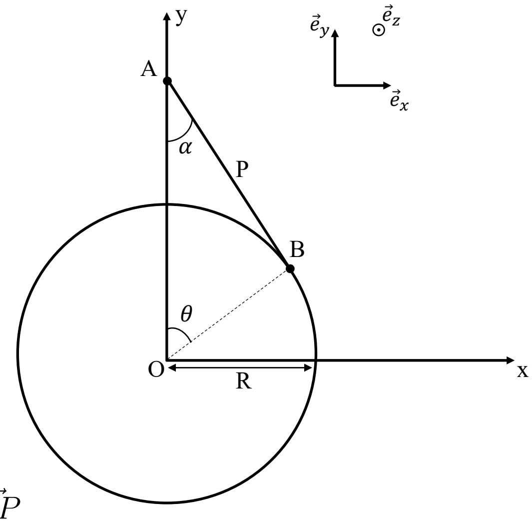
Série 12 : cinématique du solide

1 Piston et bielle

Une barre de longueur L est attachée par une de ses extrémités à une roue de rayon R tournant avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$. L'autre extrémité de la barre peut glisser sur un axe passant par le centre O de la roue.



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}_P$ d'un point P quelconque sur la barre en fonction des angles α, θ et de la distance h entre le point P et le point d'attache A.

b) En déduire que la vitesse $\vec{v}_P$ est reliée à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \dot{\alpha}\vec{e}_z$ par

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$$

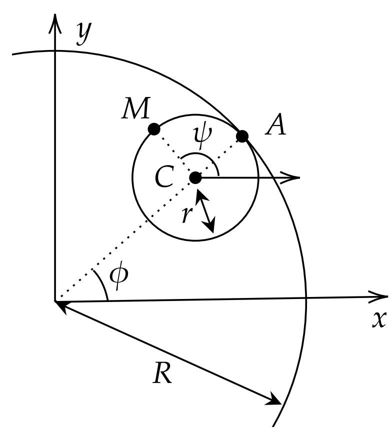
c) Déterminer une relation entre R, L, θ et α. En déduire que la vitesse $\vec{v}_P$ peut s'écrire comme

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{IP}$$

et trouver les coordonnées cartésiennes du point I. A quoi correspond ce point ?

2 Disque sur cercle

Un disque de rayon r roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon R.



a) Déterminer la vitesse du centre C du disque en fonction de son angle de rotation ϕ.

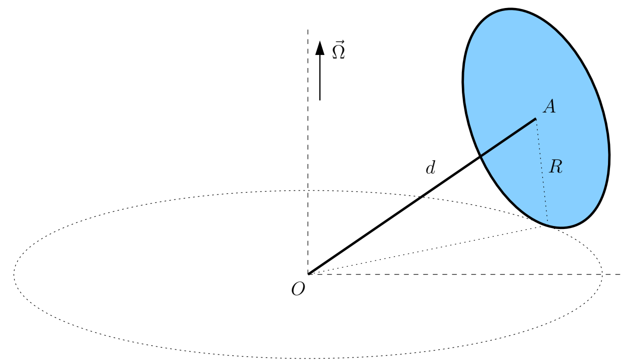
b) Déterminer la vitesse d'un point M quelconque du disque en fonction de la vitesse en son centre C et de l'angle ψ de sa rotation propre.

c) En déduire que la condition de roulement sans glissement peut s'écrire

$$(R-r)\dot{\phi} + r\dot{\psi} = 0$$

3 Roue sur axe incliné

Une roue de rayon R est attachée en son centre A à une extrémité d'un axe rigide de longueur d, perpendiculaire au plan de la roue. L'autre extrémité de l'axe est fixée en un point O du sol, supposé horizontal (voir dessin). La roue roule sans glissement sur le sol, entraînée par l'axe, qui à un mouvement de rotation caractérisé par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}(t)$ dirigé verticalement vers le haut.

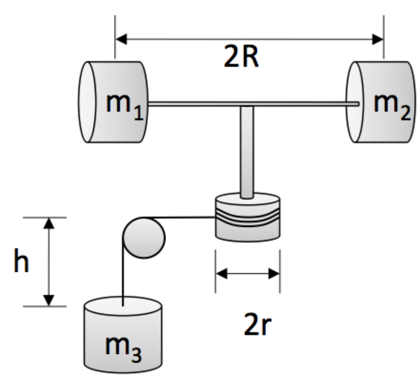


a) En utilisant la formule qui lie les vitesses vectorielles des points d'un solide indéformable, déterminer la vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ de rotation propre de la roue autour de son axe.

b) Calculer la vitesse angulaire de roulement et la vitesse angulaire de pivotement de la roue, c'est-à-dire les composantes horizontale et verticale de sa vitesse angulaire totale.

4 Haltère entrainé par un poids

Un haltère formé de deux masses m_1 et m_2 est fixé horizontalement en son centre sur un axe de rotation vertical sans masse. Cet axe est entraîné par un câble enroulé autour d'un rayon r, auquel est suspendu une masse m_3 par l'intermédiaire d'une poulie fixe sans masse. Le système est initialement au repos. On laisse ensuite chuter la masse m_3 d'une hauteur h. On néglige tous les frottements et l'axe vertical ne peut pas se déplacer.



a) Déterminer l'accélération angulaire de l'haltère.

b) Dans l'hypothèse où $m_1 = m_2 = m_3 = m$ et où r peut être négligé par rapport à R ($r \ll R$), déterminer comment la vitesse angulaire et comment le temps de chute sont affectés lorsque R est triplé.

5 Feu d'artifice balistique sur la lune. Minitest 2022 (12 points).

Pour fêter leur arrivée sur la lune, des astronautes lancent des feux d'artifice. Au temps $t = 0$, un canon placé au milieu d'une plaine lunaire plate tire un projectile de feu d'artifice de masse M avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale. Arrivé au sommet de sa trajectoire balistique, le projectile explose en mille morceaux lumineux en dégageant une énergie mécanique supplémentaire W. Les fragments ne sont pas forcément de mêmes masses. Par contre, juste après l'explosion, leurs vitesses par rapport au projectile juste avant l'explosion sont toutes horizontales et de mêmes normes u. Comme on est sur la lune, il n'y a pas de frottements.

a) Calculer le temps t_{expl} auquel l'explosion a lieu. Montrer que tous les fragments touchent le sol au même temps t_{sol}. Calculer t_{sol}.

b) Les points d'impact sur le sol sont disposés sur un cercle de rayon R. Calculer la distance entre le centre du cercle et le canon. Calculer la vitesse u en fonction des autres données du problème, puis le rayon du cercle.

c) Sachant qu'un des fragments est retombé sur le canon, calculer le rapport entre W et l'énergie cinétique initiale du projectile.

Disponible aussi sur Moodle `https://moodle.epfl.ch/mod/folder/view.php?id=1309845`

Elements de réponse :

Exercice 1 : Exercice 1 : La position du point I est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{r}_I &= (L\cos\alpha\tan\theta + L\sin\alpha)\vec{e}_x + (R\cos\theta + L\cos\alpha)\vec{e}_y \\ &= L\Big[(\cos\alpha\tan\theta + \sin\alpha)\vec{e}_x + \Big(\frac{\sin\alpha}{\tan\theta} + \cos\alpha\Big)\vec{e}_y\Big].\end{aligned}$$

Exercice 2 : Exercice 2 : La vitesse d'un point M sur le disque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{v}_C + \dot{\psi}\vec{e}_z \wedge \overrightarrow{CM}. \tag{1}$$

Exercice 3 : Exercice 3 : La vitesse angulaire de roulement $\omega_\parallel$ de la roue est

$$\omega_\parallel = \omega\cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \omega\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega\frac{d}{R}\,.$$

La vitesse angulaire de pivotement $\omega_\perp$ de la roue est la composante perpendiculaire au sol du vecteur $\vec{\Omega} + \vec{\omega}$, donc

$$\omega_\perp = \Omega - \omega\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}) = \Omega - \omega\frac{R}{\sqrt{d^2+R^2}} = \Omega - \Omega = 0\,.$$

Exercice 4 : Exercice 4 : L'accélération angulaire de l'haltère est donnée par :

$$\ddot{\theta} = \frac{m_3 r g}{m_3 r^2 + (m_1+m_2)R^2}\,. \tag{2}$$

Exercice 5 : Exercice 5 : Le rayon du cercle formé par les fragments quand ils arrivent au sol est donné par :

$$R = \frac{v_0\sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2W}{M}}\,. \tag{3}$$