

Série 05 : Oscillateurs harmoniques

1 Araignée suspendue à un fil élastique

Une araignée de masse m est suspendue par son fil de constante élastique k et de longueur à vide L à un arbre supposé fixe. Elle est soumise à la gravitation et oscille verticalement autour de sa position d'équilibre. On néglige les frottements.

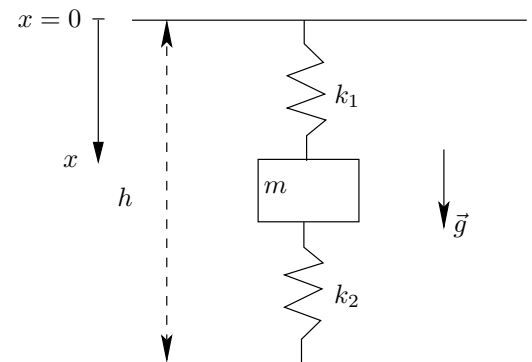
- Faire un dessin de la situation et représenter toutes les forces subies par l'araignée. Choisir des coordonnées pour décrire le mouvement de l'araignée. Quelle est sa position d'équilibre ?
- Ecrire l'équation du mouvement de l'araignée.
- La solution générale de l'équation du mouvement est donnée par $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) + \bar{x}$. Déterminer les valeurs de $\bar{x}$ et ω_0 qui satisfont l'équation du mouvement trouvée en b).

On considère maintenant que les frottements de l'air ne sont pas négligeables. La force de frottement est opposée à la vitesse et sa norme $|\vec{F}|$ est proportionnelle à la norme de la vitesse instantanée : $|\vec{F}| = \eta |\vec{v}|$.

- Ecrire l'équation du mouvement vertical de l'araignée.
- Quelle est la condition sur le coefficient η pour que le mouvement soit sous-critique ? Quelle est alors la pulsation effective (ou pseudo-pulsation) de l'oscillation ?
- Déterminer le nombre N de pulsations après lequel l'amplitude a diminué de moitié.

2 Oscillateur à deux ressorts

Un bloc de masse m , soumis à la pesanteur $\vec{g}$, est relié au sol et au plafond d'une pièce de hauteur h par deux ressorts verticaux de longueurs à vide nulles et de raideurs k_1 et k_2 , comme indiqué sur la figure. On ne considère que les mouvements verticaux du bloc, selon un axe x dirigé vers le bas avec son origine au plafond. On néglige les dimensions du bloc ainsi que les frottements.



- Représenter sur un dessin toutes les forces qui s'appliquent sur le bloc et donner leurs expressions.
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement du bloc. Constaté qu'il s'agit de celle d'un oscillateur harmonique. Quelle en est la pulsation ?
- On lâche le bloc depuis le plafond avec une vitesse initiale nulle. Sachant que les paramètres du problème sont tels que le bloc ne touchera jamais le sol, au bout de combien de temps le bloc atteindra-t-il le point le plus bas de sa trajectoire ? Quelle est la position x de ce point ?

Application numérique : $k_1=100$ N/m, $k_2=20$ N/m, $m=10$ kg, $h=4$ m et $g=10$ m/s²

3 Ressort dans une boîte

Une boîte fermée de masse M est posée sur une table. A l'intérieur, une bille de masse m est fixée au couvercle par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . Quelle doit être l'amplitude minimale A des oscillations verticales de la bille pour que la boîte décolle de la table ? On suppose que les valeurs de l_0 et k sont suffisamment grandes pour que la bille ne tape ni le couvercle, ni la table, avant que la boîte ne décolle.

Indication : traiter la bille et la boîte comme des points matériels.

