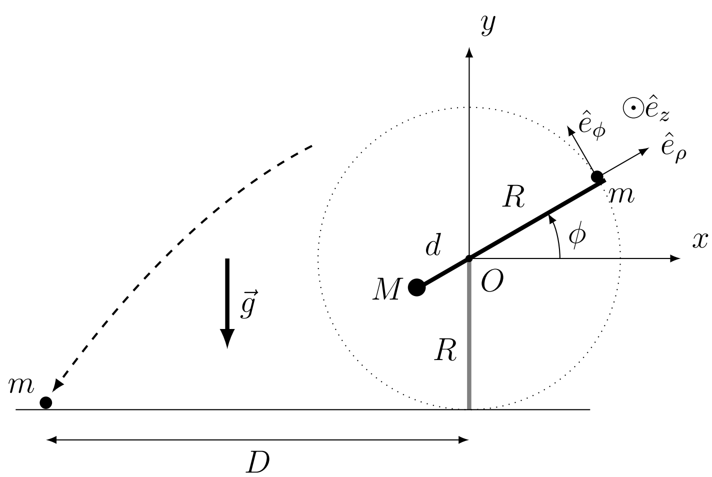
*À rendre le jeudi 26 novembre 2020* *tigrane.cantatmoltrecht@epfl.ch*

# Corrigé du mini-test 4 : Catapulte

(5+3+7+3 = 18 points au total)

a) On considère le système de la catapulte et du boulet, qui peut être vu comme un solide indéformable tant que le boulet est en contact avec la poutre. Les forces extérieures sont les poids $M\vec{g}$ et $m\vec{g}$, ainsi que la force $\vec{T}$ de l'axe sur la poutre. Le théorème du centre de masse permettrait de déterminer la force $\vec{T}$. Le théorème du moment cinétique $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{A}}$ calculé par rapport à l'axe $O$, permet lui de déterminer l'évolution de la position de la poutre.

On choisit un repère en coordonnées cylindriques, avec l'origine sur l'axe de rotation de la poutre, et l'axe $z$ parallèle à l'axe de rotation, et l'axe $x$ horizontal.




Le moment d'inertie des deux boulets pour les rotation autour de l'axe $z$ est

$$I_z = Md^2 + mR^2\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{B}} \tag{1}$$

Le moment cinétique par rapport au point $O$ s'écrit

$$\vec{L}_O = I_z\dot{\phi}\,\hat{e}_z = (Md^2 + mR^2)\dot{\phi}\,\hat{e}_z\,, \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{C}} \tag{2}$$

et la somme des moments des forces

$$\vec{M}_O = dMg\cos\phi\,\hat{e}_z - Rmg\cos\phi\,\hat{e}_z\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{D}} \tag{3}$$

Le théorème du moment cinétique, $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$, projeté sur l'axe $\hat{e}_z$, donne

$$(Md^2 + mR^2)\ddot{\phi} = (Md - mR)g\cos\phi\,. \quad \boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{E}} \tag{4}$$

b) Les forces qui s'appliquent sur le boulet sont le poids $m\vec{g} = -mg\cos\phi\,\hat{e}_\phi - mg\sin\phi\,\hat{e}_\rho$, la force de liaison avec la poutre $\vec{N} = N_\phi\,\hat{e}_\phi$, et la force radiale $\vec{T} = T_\rho\,\hat{e}_\rho$ qui maintient la boulet à une distance $R$ constante de l'axe $O$ $\boxed{\text{1 point pour } \vec{N} \text{ et } \vec{T}}_{\mathrm{F}}$. L'accélération du boulet en coordonnées cylindrique est donnée par $\vec{a} = R\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi - R\dot{\phi}^2\,\hat{e}_\rho$ $\boxed{\text{1 point}}_{\mathrm{G}}$.

Les équations du mouvement du boulet, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, projetées sur le repère en coordonnées cylindriques sont alors $\boxed{\text{1 point}}_{\text{H}}$

$$N_\phi - mg\cos\phi = mR\ddot{\phi} \tag{5}$$

$$T_\rho - mg\sin\phi = -mR\dot{\phi}^2\,. \tag{6}$$

c) La condition de décollement est $N_\phi = 0$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{I}}$. En combinant les équations (4) et (5), on trouve

$$N_\phi = \frac{Md(R+d)}{Md^2 + mR^2} mg\cos\phi\,. \ \boxed{\text{1 point (1/2 si la dépendance en } \cos\phi \text{ est obtenue)}}_{\text{J}} \tag{7}$$

Il y a donc décollement si $\cos\phi = 0$, c'est-à-dire si $\phi = \pi/2$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{K}}$.
Avant le décollement du boulet, les forces sur le système de la poutre et des deux masses sont conservatives (les poids) ou ne travaille pas (la force $\vec{T}$). Pour déterminer la vitesse, on peut donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique $\boxed{\text{1 point}}_{\text{L}}$,

$$E = \frac{1}{2}Md^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 - Mgd\sin\phi + mgR\sin\phi\,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{M}} \tag{8}$$

Initialement, $\phi = 0$ et $\dot{\phi} = 0$, et donc $E_0 = 0$. En $\phi = \pi/2$, on a

$$E_{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(Md^2 + mR^2)\dot{\phi}^2 - (Md - mR)g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\phi}^2 = 2\frac{Md - mR}{Md^2 + mR^2}g \tag{9}$$

Donc la vitesse $v_1$ au moment du décollement est horizontale $\vec{v}_1 = -v_1\,\hat{e}_x$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{N}}$ et de norme

$$v_1 = R\dot{\phi} = R\sqrt{\frac{Md - mR}{Md^2 + mR^2}2g}\,. \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{O}} \tag{10}$$

d) On redéfinit l'origine du temps à l'instant du décollement pour écrire l'équation horaire du mouvement balistique du boulet $\boxed{\text{1 point}}_{\text{P}}$

$$x(t) = -v_1 t \tag{11}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + R\,. \tag{12}$$

Le boulet touche le sol en $y = -R$, et donc au temps $t = 2\sqrt{R/g}$ $\boxed{\text{1 point}}_{\text{Q}}$. La distance horizontale parcourue est alors

$$D = x(t = 2\sqrt{R/g}) = -2\sqrt{\frac{R}{g}}R\sqrt{\frac{Md - mR}{Md^2 + mR^2}2g} = -2R\sqrt{R\frac{Md - mR}{Md^2 + mR^2}}\,, \ \boxed{\text{1 point}}_{\text{R}} \tag{13}$$

qui ne dépend pas de $g$ !