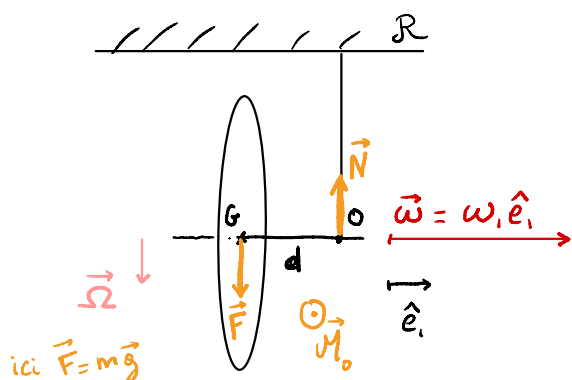


VI) Effets gyroscopiques

On considère un solide de révolution (ex: cylindre, cône ...) tournant à grande vitesse $\vec{\omega}$ autour de son axe de symétrie

1) Mouvement de précession Ex: roue suspendue (+ son axe)



$$\vec{L}_0 = I_1 \omega_1 \hat{e}_1(t) \rightarrow \dot{\vec{L}}_0 ? = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_0$$

* Moment des forces en O :

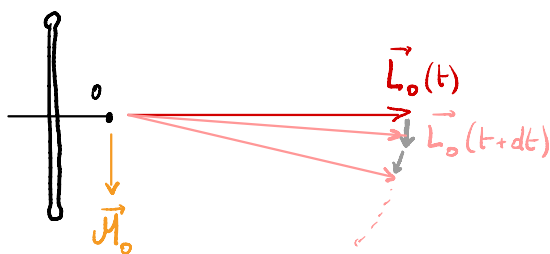
$$\begin{aligned} \vec{OG} \wedge \vec{F} &= -d \hat{e}_1 \wedge \vec{F} \\ &= d \vec{F} \wedge \hat{e}_1 \\ &= \underbrace{\frac{d}{I_1 \omega_1} \vec{F}}_{\vec{\Omega}} \wedge \vec{L}_0(t) \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_0}$ où $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{d}{|\vec{L}_0|} \vec{F}}$

↳ mvt de précession = rotation de $\vec{L}_0$ ou $\vec{L}_G$ autour de $\vec{\Omega} \parallel \vec{F}$

Vue de dessus

roue



$$\vec{L}_0(t+dt) = \vec{L}_0(t) + dt \vec{M}_0$$



En réalité, $\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega} + \vec{\Omega}$ (rotation réelle de la roue)

On a donc fait l'approximation $\boxed{\Omega \ll \omega_1}$ approximation gyroscopique

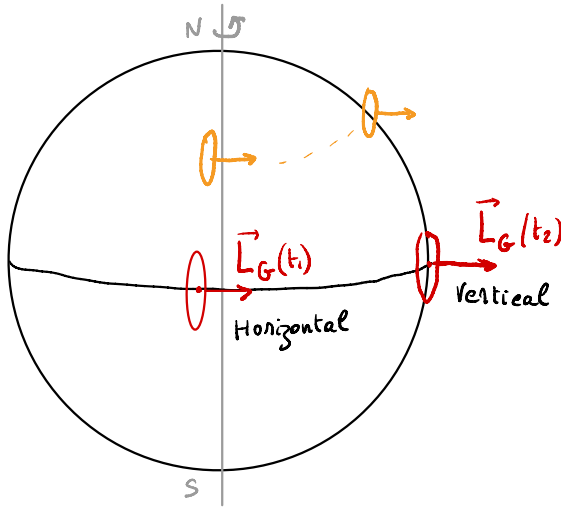
c'est à dire : $\frac{dF}{I_1 \omega_1} \ll \omega_1 \Rightarrow \boxed{I_1 \omega_1^2 \gg dF}$

($\hookrightarrow$ cas général, le mvt est décrit par les équations d'Euler)

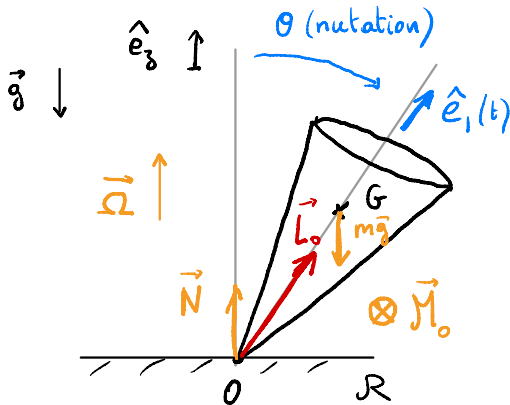
2) Gyroscope = libre de tourner autour de son centre de masse G

$\hookrightarrow$ Toutes les forces (poids + liaisons) sont appliquées en G

Donc $\vec{L}_G$ est conservé $\rightarrow$ pointe dans une direction fixe dans un référentiel galiléen !



3) Toupie : modèle = cône tournant vite autour de son axe, posé sur son sommet



$$\dot{\vec{L}}_0 = \vec{OG} \wedge m\vec{g} \approx -m\vec{g} \wedge \frac{d}{dt} \vec{L}_0(t)$$

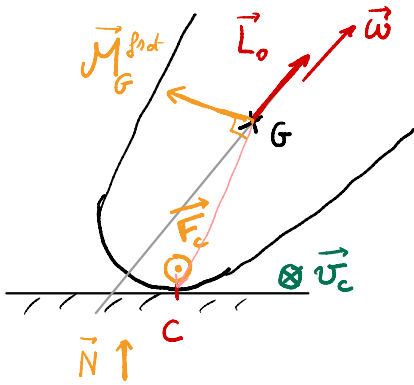
$$\approx \underbrace{\frac{mgd}{I_1 \omega_1} \hat{e}_3}_{\vec{\Omega}} \wedge \vec{L}_0(t)$$

$\hookrightarrow$ précession autour de $\hat{e}_3$

Rmq: lorsque ω_1 diminue, la vitesse de précession augmente

Effet des forces de frottement

↳ Frottements cinétiques au point de contact C avec la table
 ↳ glisse, $\vec{v}_C \neq \vec{0}$

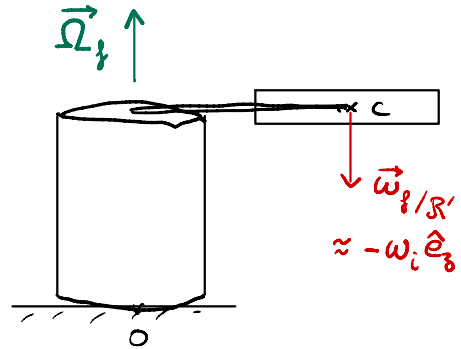
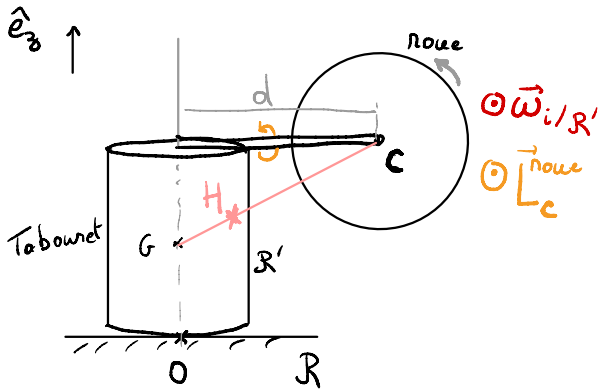


$$\vec{L}_G = \underbrace{\vec{GC} \wedge \vec{N}}_{\text{précession}} + \underbrace{\vec{GC} \wedge \vec{F}_c}_{\text{i) redresser la taupie}}$$

ii) diminuer ω

Exercices

1) Tabouret à force gyroscopique



$$\text{Approx: } |\vec{\omega}_{i/R'}| = |\vec{\omega}_3/R'|$$

* Système: tabouret (+ personne) + roue

* En l'absence de frottement, les forces externes (poids + liaisons) n'ont aucun moment selon $\hat{e}_3$ (car elles sont $\parallel \hat{e}_3$)

↳ D'après le th. du mom. cin. en H (c.o.m. du système)

$$\vec{L}_H^{\text{tot}} \cdot \hat{e}_3 = \text{cste}$$

Initialement : $L_{H,3}^{\text{tab.}} = 0$ car tabouret immobile

$$L_H^{\text{roue}} = \vec{L}_c^* + H\vec{C} \wedge m\vec{v}_c = \vec{L}_c^* \perp \hat{e}_3$$

$\downarrow$
roue $= \vec{0}$

Donc $L_{H,3}^{\text{tot}} = 0$

Finalement :

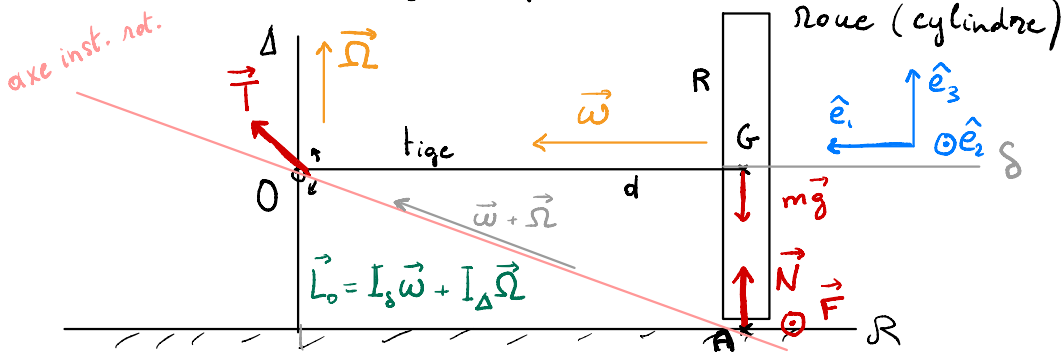
$$\left. \begin{aligned} L_{H,3}^{\text{tab.}} &= I_{H,3}^{\text{tab.}} \Omega_f \\ L_{H,3}^{\text{roue}} &= I_{H,3}^{\text{roue}} (-\omega_i + \Omega_f) \end{aligned} \right\} \Sigma = 0$$

Ainsi $I^{\text{tab.}} \Omega_f + I^{\text{roue}} (\Omega_f - \omega_i) = 0$

$$\Omega_f = \frac{I^{\text{roue}}}{I^{\text{roue}} + I^{\text{tab.}}} \omega_i$$

Cas limite : si $I^{\text{tab.}} \gg I^{\text{roue}}$ alors $\Omega_f \approx 0$

2) Moulin à force gyroscopique → Trouver $\vec{N}$ en fct. de Ω



Système: tige (sans masse) + roue = 1 solide

Roue roule sans glisser dans $\mathcal{R}$ ($\vec{v}_A = \vec{0}$)

$$\vec{v}_O = \vec{v}_A = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_G = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{OG} = \vec{\Omega} \wedge \vec{OG} = \Omega \hat{e}_3 \wedge (-d \hat{e}_1) = -\Omega d \hat{e}_2 \\ \vec{v}_G = (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{AG} = \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \omega \hat{e}_1 \wedge R \hat{e}_3 = -\omega R \hat{e}_2 \end{cases}$$

Donc $\Omega d = \omega R$

$$\omega = \frac{d}{R} \Omega \quad \text{si } d \gg R, \omega \gg \Omega$$

Forces: * Poids $m\vec{g} = -mg \hat{e}_3$ en G

* liaison $\vec{N} = N \hat{e}_3$ en A

* frottements statiques $\vec{F} = F \hat{e}_2$ en A

* liaison $\vec{T}$ en O

Moment cinétique en O

$$\vec{L}_O = \vec{L}_G^* + \vec{OG} \wedge m \vec{v}_G$$

$$\text{or } \vec{L}_G^* = I_1 \omega \hat{e}_1 + I_3 \Omega \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega \\ 0 \\ I_3 \Omega \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \vec{OG} \wedge m \vec{v}_G = \vec{OG} \wedge m (\vec{\Omega} \wedge \vec{OG}) = m d^2 \vec{\Omega} = \vec{0}$$

$$\text{Ainsi : } \vec{L}_O = \underbrace{(I_3 + m d^2)}_{I_A} \Omega \hat{e}_3 + \underbrace{I_1}_{I_s} \omega \hat{e}_1(t)$$

$$\vec{L}_O = I_1 \omega \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_1 = I_1 \omega \Omega \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1 = \underline{I_1 \omega \Omega \hat{e}_2} = \Sigma \vec{M}_O$$

Deux forces ont un moment selon $\hat{e}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{OG} \wedge m\vec{g} + \vec{OA} \wedge \vec{N} &= -d\hat{e}_1 \wedge -mg\hat{e}_3 + (-d\hat{e}_1) \wedge N\hat{e}_3 \\ &= -mgd\hat{e}_2 + dN\hat{e}_2 = \underline{d(N-mg)\hat{e}_2} = \Sigma \vec{M}_O \end{aligned}$$

Donc $I_1 \omega \Omega = d(N-mg) \Leftrightarrow I_1 \frac{\Omega^2}{R} = N - mg$

$$N = mg + I_1 \frac{\Omega^2}{R}$$