

Résumé

* Le mt du c.d.m. est donné par

$$M_{\text{rot}} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad \text{Th. du c.d.m.}$$

* Le théorème du mom. cin. en un point A satisfaisant

$$\vec{v}_A(t) = \vec{0} \quad \text{ou bien} \quad \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G \quad \text{s'écrit}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (\text{notamment vrai si } A = G)$$

* Si $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ est un repère d'inertie en G
et $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse de rotation du solide dans R

$$\text{alors} \quad \vec{L}_G = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (= \vec{L}_G^* \text{ dans } \mathcal{R}^*)$$

Pour obtenir $\vec{L}_A$ en $A \neq G$: $\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M \vec{v}_G$ transfert en G
König 1

ou encore $\vec{I}_{\Delta'} = \vec{I}_{\Delta} + M d^2$ Steiner si on n'a besoin que de la
composante selon $\Delta' \ni A$

$$\hookrightarrow \vec{L}_A \cdot \hat{e}_{\Delta'} = I_{\Delta'} \omega$$

* Energie cinétique

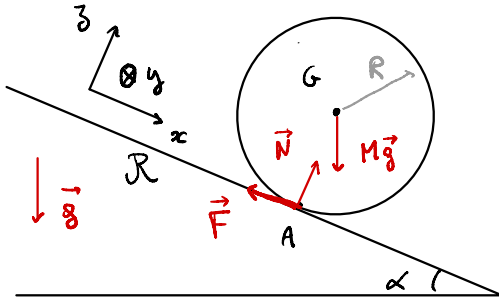
Si Δ' est l'axe instantané de rotation : $E_c = \frac{1}{2} I_{\Delta'} \omega^2$

ou alors avec $G = \text{c.d.m.}$:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta}^{(G)} \omega^2 \quad \text{König 2}$$

Applications

1) Cylindre roulant sur un plan incliné fixe (sans glissement)



Masse: M , rayon : R

Moment d'inertie p/n à G_y

$$I_{G_y} = \lambda MR^2 \text{ où } 0 < \lambda \leq 1$$

$\lambda = 1 \leftrightarrow$ cylindre creux

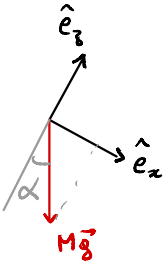
$\lambda = \frac{1}{2} \leftrightarrow$ ——— homogène

Système : cylindre

Référentiel : $\mathcal{R}$ lié au plan incliné

Contraintes : solide indéformable $\rightarrow z_G = \text{cte} \rightarrow \ddot{z}_G = 0$
roulement sans glissement $\rightarrow \vec{v}_A = \vec{0}$

Bilan des forces : poids en G , $M\vec{g} = Mg \sin \alpha \hat{e}_x - Mg \cos \alpha \hat{e}_z$



Réaction en A : $\vec{N} = N_z \hat{e}_z$ ($\perp$ support)

Frottement statique : $\vec{F} = F_x \hat{e}_x$

Th. du c.d.m : $M \ddot{x}_G = F_x + Mg \sin \alpha$ (I) ($\cdot \hat{e}_x$) $\rightarrow 2$ inconnues

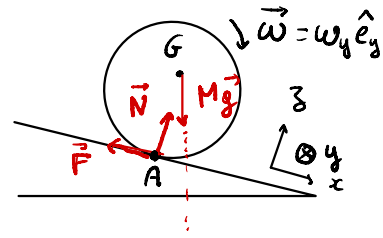
$$0 = -Mg \cos \alpha + N_z \quad (\cdot \hat{e}_z)$$

$$\Rightarrow \underline{N_z = Mg \cos \alpha}$$

Th. du mom. cin. en A (car $\vec{v}_A = \vec{0}$)

* Un seul moment de force non nul :

$$\begin{aligned}\vec{AG} \wedge M\vec{g} &= R\hat{e}_3 \wedge Mg \sin \alpha \hat{e}_x \\ &= Mg \sin \alpha R \hat{e}_y\end{aligned}$$



* Moment cinétique en A, projeté sur $\hat{e}_y$:

$$\vec{L}_A \cdot \hat{e}_y = I_{Ay} \omega_y = (I_{Oy} + MR^2) \omega_y = (\lambda + 1) MR^2 \omega_y$$

Donc : $(\lambda + 1) MR^2 \dot{\omega}_y = Mg \sin \alpha R$

$$\Leftrightarrow \boxed{R \dot{\omega}_y = \frac{g \sin \alpha}{1 + \lambda}} \rightarrow \text{lien entre } \omega_y \text{ et } \dot{x}_G$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \omega_y \hat{e}_y \wedge R \hat{e}_3 = R \omega_y \hat{e}_x$$

Donc $\boxed{R \omega_y = \dot{x}_G}$

On obtient une 2^{ème} équation : $\boxed{\ddot{x}_G = \frac{g \sin \alpha}{1 + \lambda}} \quad (2)$

$$M \ddot{x}_G = F_x + Mg \sin \alpha \quad (1)$$

* Alternative : Th. du mom. cin. en G

* Moment de force : $\vec{GA} \wedge \vec{F} = -R \hat{e}_3 \wedge F_x \hat{e}_x = -R F_x \hat{e}_y$

* Mom. cin : $\vec{L}_G \cdot \hat{e}_y = \lambda MR^2 \omega_y$

Donc : $\lambda MR^2 \dot{\omega}_y = -R F_x \Leftrightarrow \boxed{\lambda M \ddot{x}_G = -F_x} \quad (3)$

Si on somme (1)+(3) : $(1+\lambda) M \ddot{x}_G = Mg \sin \alpha$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_G = \frac{g \sin \alpha}{1+\lambda}} \quad (2)$$

Conclusions a) $\dot{x}_G = \frac{g \sin \alpha}{1+\lambda} \cdot t \rightarrow$ si la masse est concentrée sur l'axe $\rightarrow$ va plus vite
 $\downarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda$ petit

b) Condition de non glissement ?

$$|\vec{F}| \leq \mu_s |\vec{N}| \Rightarrow \frac{|\vec{F}|}{|\vec{N}|} \leq \mu_s \quad \text{or} \quad |\vec{N}| = Mg \cos \alpha$$

$$\text{et} \quad |\vec{F}| = \frac{\lambda}{1+\lambda} Mg \sin \alpha$$

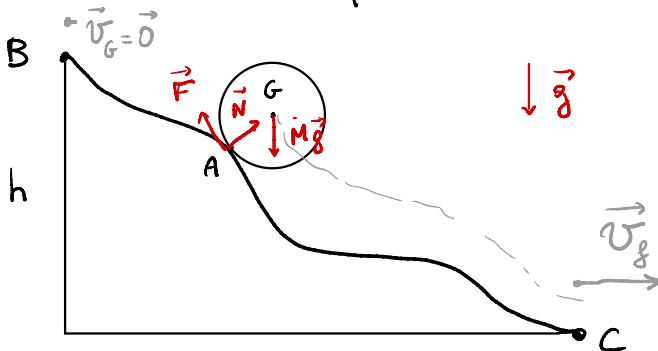
donc $\boxed{\tan \alpha \leq \frac{1+\lambda}{\lambda} \mu_s}$ si $\tan \alpha > \frac{1+\lambda}{\lambda} \mu_s$, ça glisse

Cylindre creux ($\lambda=1$) : $\tan \alpha \leq 2 \mu_s$

Cylindre plein ($\lambda=\frac{1}{2}$) : $\tan \alpha \leq 3 \mu_s$

(Rappel : glissement sans roulement : $\tan \alpha \leq \mu_s$)

Variante : vitesse finale ?



Travail des forces : • poids (conservative) : $W_{B \rightarrow C} = M g h$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F} \cdot \vec{v}_A = 0 \quad \text{car} \quad \vec{v}_A = \vec{0} \\ \vec{N} \cdot \vec{v}_A = 0 \end{array} \right\} \text{ne travaillent pas}$$

Th. de l'énergie cinétique : $K_C - K_B = M g h$

$$\text{or } K_B = 0 \quad \text{et} \quad K_C = \frac{1}{2} I_{A_y} \omega_f^2 = \frac{1}{2} (\lambda M R^2 + M R^2) \omega_f^2$$

$$= \frac{1}{2} (\lambda + 1) M v_f^2$$

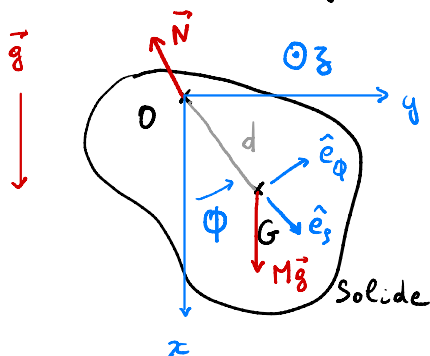
$$\text{ou bien : } K_C = \frac{1}{2} M v_f^2 + \frac{1}{2} I_{G_y} \omega_f^2 = \frac{1}{2} M v_f^2 + \frac{1}{2} \lambda M v_f^2$$

$$= \frac{1}{2} (\lambda + 1) M v_f^2$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} (\lambda + 1) M v_f^2 = M g h$$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{2 g h}{1 + \lambda} < 2 g h \text{ (pt. mat.)}$$

2) Pendule "physique" (solide tourne autour d'un axe fixe)



Th. du mom. cin. en O :

• Un seul moment de force :

$$\vec{OG} \wedge M \vec{g} = d \hat{e}_3 \wedge M g (-\sin \phi) \hat{e}_\phi$$

$$= -M g d \sin \phi \hat{e}_3$$

$$\vec{L}_O \cdot \hat{e}_3 = I_{O_3} \cdot \omega_3$$

(Force de liaison $\vec{N}$ inconnue)

on $I_{O_3} = I_{G_3} + M d^2$ et $\omega_3 = \dot{\Phi}$

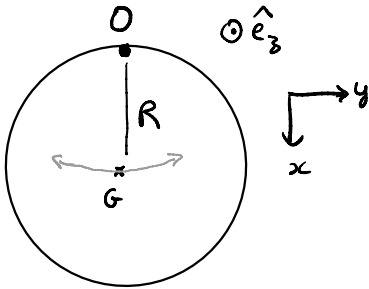
donc : $(I_{G_3} + M d^2) \ddot{\Phi} = -M g d \sin \Phi$

Si $\Phi \ll 1$ on a bien $\ddot{\Phi} + \omega_0^2 \Phi = 0$ avec

$$\omega_0^2 = \frac{M g d}{I_{G_3} + M d^2}$$

ainsi $\omega_0^2 < \frac{M g d}{M d^2} = \frac{g}{d}$

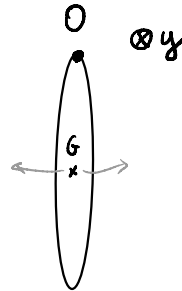
Ex : cerceau suspendu



Oscillation autour de O_3

$\hookrightarrow I_{G_3} = M R^2$

$$\omega_{O_3}^2 = \frac{M g R}{M R^2 + M R^2} = \frac{1}{2} \frac{g}{d}$$

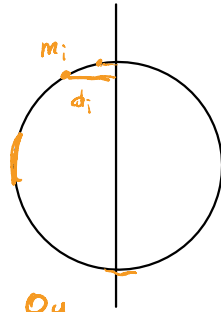


Oscillation autour de O_y

$I_{O_y} = \frac{1}{2} M R^2$

$$\omega_{O_y}^2 = \frac{M g R}{\frac{1}{2} M R^2 + M R^2} = \frac{2}{3} \frac{g}{d}$$

$\hookrightarrow$ plus rapide



V) Collision avec un solide

Préliminaire Dans un choc, il se peut que certaines composantes de $\vec{P}_{tot}$ ou $\vec{L}_{O,tot}$ ne soient pas conservées, s'il existe des forces externes inconnues pdt le choc

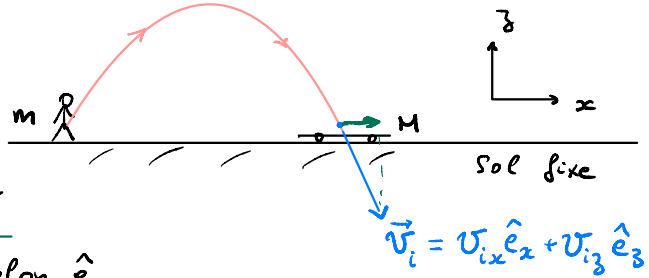
Ex: personne qui saute sur un skateboard

Au moment du choc mou, le sol exerce une réaction normale $R_s \hat{e}_3$ inconnue

$\hookrightarrow \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{e}_3$ pas conservée

Par contre $\vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{e}_x$ est conservée

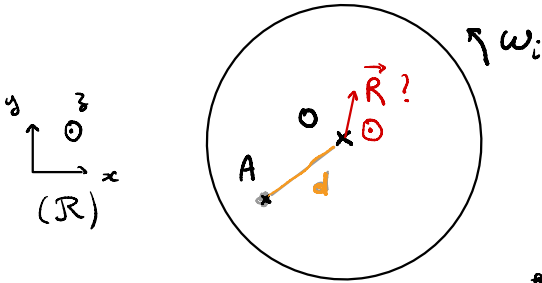
car pas de forces externes selon $\hat{e}_x$



A) Choc mou sur un disque tournant (axe fixe, sans frottement)

Un point mat (masse m) tombe verticalement sur un disque en rotation à une vitesse angulaire ω_i autour de O_3 (fixe dans $\mathcal{R}$)

Que vaut ω_f ?



Système: pt mat + disque

Bilan des forces externes

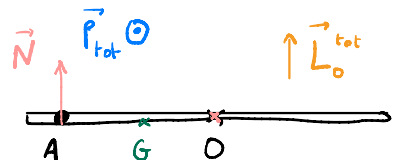
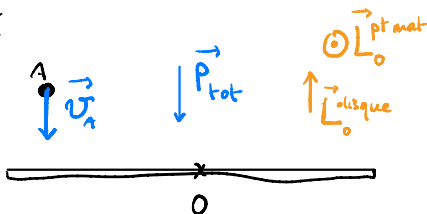
Avant / après choc :

- * poids en O et A selon $-\hat{e}_3$
- * liaisons en O selon $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_3$

Attention: pdt le choc $\rightarrow$ force inconnue de réaction selon $\hat{e}_3$

Vue de côté

Avant choc



Attention : système total pas isolé ! $\rightarrow$ $\vec{p}_{\text{tot}}$ de mvt. totale pas conservée
 $\rightarrow$ $\vec{L}_{\text{tot}}$ mom. cin. total pas conservé

Par contre $\vec{L}_0^{\text{tot}} \cdot \hat{e}_3$ est conservée

Démo : pas de moments de forces ($\vec{M}_0^{\text{ext}} \cdot \hat{e}_3$) p/r à O selon $\hat{e}_3$

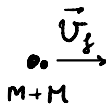
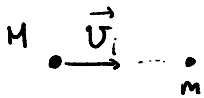
$\rightarrow$ en effet : vrai pour les forces de liaison en O
vrai pour toutes les forces selon $\hat{e}_3$

Initial : $\vec{L}_0^{\text{tot}} \cdot \hat{e}_3 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_i$ (disque homogène)

Final : $\vec{L}_0^{\text{tot}} \cdot \hat{e}_3 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_f + m d^2 \omega_f = \left(\frac{1}{2} MR^2 + m d^2 \right) \omega_f$

Donc $\omega_f = \frac{\frac{1}{2} MR^2}{\frac{1}{2} MR^2 + m d^2} \omega_i \rightarrow$ d'autant plus petit que d est grand

Rappel : choc mou linéaire entre 2 pts mat :



$$(M+m) v_f = M v_i$$

$$\hookrightarrow v_f = \frac{M}{M+m} v_i$$

similaire

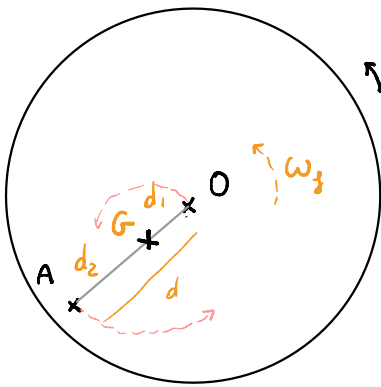
B) Même choc mou, mais disque est libre selon x, y

$\rightarrow$ plus aucune force dans le plan x, y $\rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} \cdot \hat{e}_x, \vec{p}_{\text{tot}} \cdot \hat{e}_y$
conservées

$\rightarrow$ O n'est pas fixe

$\hookrightarrow \vec{L}_G$

$\hookrightarrow x_G$ et y_G constantes



$\vec{L}_G^{\text{tot}}, \hat{e}_3$ est conservée

Avant :

$$\vec{L}_G^{\text{disque}} = \vec{L}_O + \vec{GO} \wedge m \vec{v}_O = \vec{L}_O^{\text{disque}}$$

$\vec{v}_O = \vec{0}$

$$L_{G,3}^{\text{tot}} = \frac{1}{2} M R^2 \omega_i$$

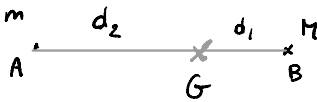
Après : $L_{G,3}^{\text{tot}} = L_{G,3}^{\text{pt mat}} + L_{G,3}^{\text{disque}} = m d_2^2 \omega_f + \left(\frac{1}{2} M R^2 + M d_1^2 \right) \omega_f$

Or $d_1 = \frac{m}{m+M} d$ et $d_2 = \frac{M}{m+M} d$

d'où $M d_1^2 + m d_2^2 = \mu d^2$ où $\mu = \frac{mM}{m+M}$

Donc :

$$\omega_f = \omega_i \frac{\frac{1}{2} M R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + \mu d^2}$$



$$M \vec{GB} + m \vec{GA} = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M d_1 - m d_2 = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 = d \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) + m \times (2) : (M+m) d_1 = m d$$

$$-(1) + M \times (2) : (M+m) d_2 = M d$$