

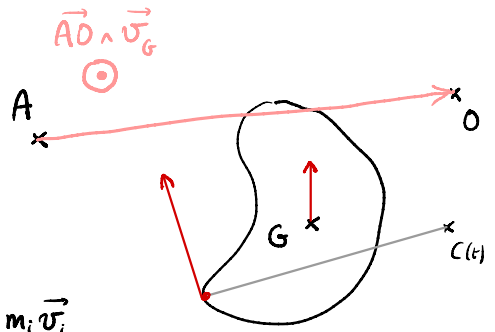
II) Dynamique du solide

1) Théorème du transfert

Admettons que nous connaissons $\vec{L}_0$

que vaut $\vec{L}_A$?

$$\vec{L}_A = \sum_i \vec{AP}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum_i \vec{AO} \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{AO} \wedge M_{\text{tot}} \vec{v}_G} + \underbrace{\sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i}_{\vec{L}_O}$$

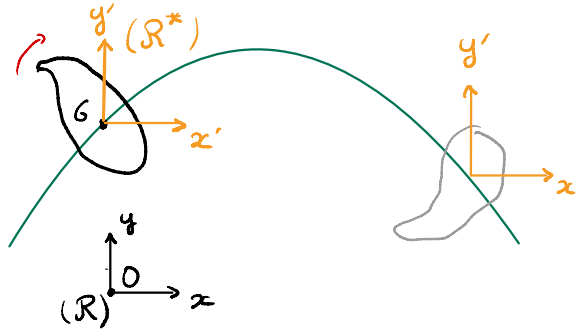


Done $\vec{L}_A = \vec{L}_O + \vec{AO} \wedge M_{\text{tot}} \vec{v}_G$

2) Référentiel du centre de masse

Déf: $\mathcal{R}^*$ est en translation p/n à $\mathcal{R}$ à vitesse $\vec{v}_G(t)$

Ex: objet lancé



Composition des vitesses : $\vec{v}_i = \vec{v}_i^* + \vec{v}_G$

$$\vec{L}_G = \sum_i \vec{G} \vec{P}_i \wedge m_i (\vec{v}_i^* + \vec{v}_G) = \underbrace{\sum_i \vec{G} \vec{P}_i \wedge m_i \vec{v}_i^*}_{\vec{L}_G^*} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{G} \vec{P}_i \right) \wedge \vec{v}_G}_{=\vec{0}}$$

Donc $\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$

3) 1^{er} théorème de König :

$$\vec{L}_A = \vec{L}_G^* + \vec{AG} \wedge M_{\text{tot}} \vec{v}_G$$

Pour un point A quelconque

↳ Le mom. cin. p/n à A est la somme :

(i) du mom cin. du solide p/n à son centre de masse

(ii) du mom. cin. du point matériel G de masse M_{tot} p/n à A

4) 2^{ème} théorème de König :

$$K = K^* + \frac{1}{2} M_{\text{tot}} v_G^2$$

où K est l'énergie cinétique du solide dans R

K^* ————— R^*

Démo :
$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i (v_i^{*2} + 2 \vec{v}_i^* \cdot \vec{v}_G + v_G^2) m_i$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{*2}}_{K^*} + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i^* \right)}_{\frac{d}{dt} \sum_i m_i \underbrace{\vec{GP}_i}_{\vec{0}}} \cdot \vec{v}_G + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right)}_{M_{\text{tot}}} v_G^2$$

5) Th. du moment cinétique p/n à un point quelconque A

$$\dot{\vec{L}}_A = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge M_{\text{tot}} \vec{v}_G$$

Cas importants

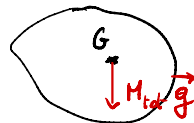
$$* \vec{v}_A(t) = \vec{0} \rightarrow \dot{\vec{L}}_A = \sum_i \vec{M}_{A,i}$$

$$\vec{M}_{A,i} = \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$* A = G \rightarrow \dot{\vec{L}}_G = \dot{\vec{L}}_G^* = \sum_i \vec{M}_{G,i}$$

Ex : solide lancé, en chute libre

↳ seule force = le poids, appliqué en G



a) Th. du c.d.m. $M \ddot{\vec{r}}_G = M \vec{g} \rightarrow$ parabole

b) Th. du mom. cin. en G dans $\mathcal{R}^*$

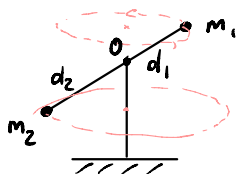
$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G^* = \underbrace{\vec{OG}}_{\text{point d'application}} \wedge M \vec{g} = \vec{0} \rightarrow \vec{L}_G^* = \text{constante}$$

Quel est le lien entre $\vec{L}_O$ et $\vec{\omega}$?

III) Moment d'inertie

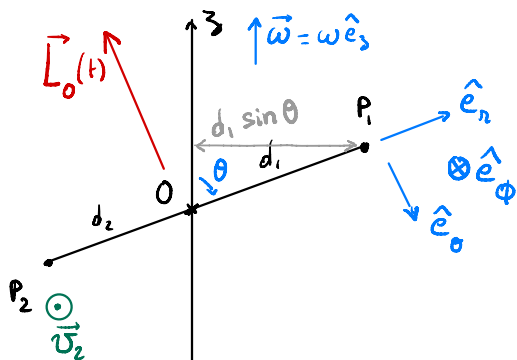
1) Exemple : 2 pts mat. liés par une tige sans masse qui est contrainte à tourner autour de Oz

vue de côté



On cherche $\vec{L}_O$

Coordonnées sphériques



$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_i = (\omega \hat{e}_3) \wedge (d_i \hat{e}_r) \\ &= \omega d_i \sin \theta \hat{e}_\phi \quad \text{où } \omega = \dot{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{OP}_1 \wedge \vec{v}_1 + \vec{OP}_2 \wedge \vec{v}_2 \\ &= d_1 \hat{e}_r \wedge \omega d_1 \sin \theta \hat{e}_\phi m_1 \\ &\quad - d_2 \hat{e}_r \wedge \omega d_2 \sin \theta (-\hat{e}_\phi) m_2 \end{aligned}$$

Donc $\vec{L}_O = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \sin \theta \, \omega \, (-\hat{e}_\theta)$

↳ $\vec{L}_O$ n'est pas proportionnel à $\vec{\omega}$

($\vec{L}_O$ dépend du temps car $\hat{e}_\theta$ tourne $\Rightarrow$ moments de force sur l'axe)

Remarques

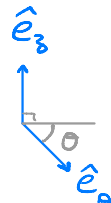
a) Cas particulier où $\theta = \frac{\pi}{2}$ (tige $\perp O_3$) : $\vec{L}_O = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \vec{\omega}$

I_{O_3} : moment d'inertie p/n à O_3

b) Si on s'intéresse seulement à $\omega(t)$ et $\vec{\omega}$, on peut projeter

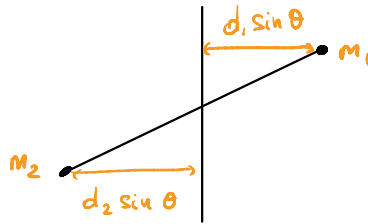
$\vec{L}_O$ selon $\hat{e}_3 \parallel \vec{\omega}$:

$$\vec{L}_O \cdot \hat{e}_3 = \underbrace{\left[m_1 (d_1 \sin \theta)^2 + m_2 (d_2 \sin \theta)^2 \right]}_{I_{O_3}} \omega$$



$$\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$$

On trouve : $L_{O,3} = I_{O_3} \omega$

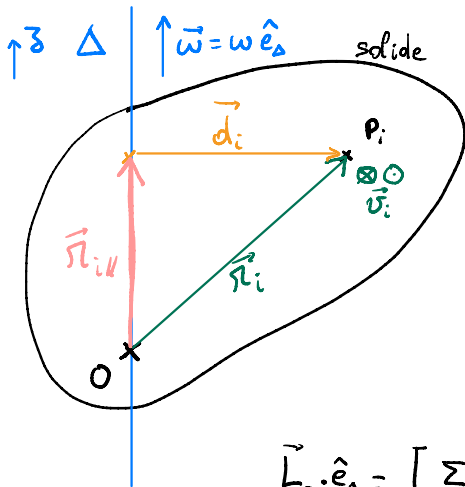


2) Moment d'inertie d'un solide p/n à un axe fixe

On considère un solide contraint à tourner autour d'un axe Δ

Soit $\hat{e}_\Delta$ un vecteur unitaire selon Δ et O un point sur Δ

↳ calculer $\vec{L}_O$ puis projeter $\vec{L}_O \cdot \hat{e}_\Delta = \dots \vec{\omega}$



$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{OP}_i \wedge m \vec{v}_i \quad \text{où } \vec{OP}_i = \vec{r}_{i||} + \vec{d}_i$$

$$= \sum_i m_i \underbrace{\vec{r}_{i||} \wedge \vec{v}_i}_{\substack{\perp \vec{r}_{i||} \\ \perp \Delta}} + \sum_i m_i \underbrace{\vec{d}_i \wedge \vec{v}_i}_{\parallel \hat{e}_\Delta}$$

En projetant $\vec{L}_O$ sur $\hat{e}_\Delta$ seul le 2^{ème} terme contribue.

$$\vec{L}_O \cdot \hat{e}_\Delta = \left[\sum_i m_i \vec{d}_i \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{d}_i) \right] \cdot \hat{e}_\Delta \quad \left. \begin{array}{l} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} \\ - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{array} \right\}$$

$$= \left[\sum_i m_i d_i^2 \vec{\omega} \right] \cdot \hat{e}_\Delta$$

$$= \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega$$

Donc $\vec{L}_O \cdot \hat{e}_\Delta = \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega$ où $\sum_i m_i d_i^2 = I_\Delta = I_{O_3}$

$\downarrow$
 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

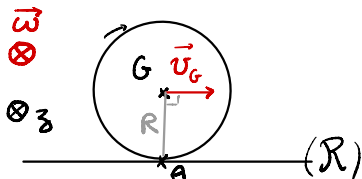
complément: $I_\Delta = \iiint \vec{r}_\perp^2 \rho(\vec{r}) dV$
 $\hookrightarrow dx dy dz$

3) Energie cinétique de rotation

$$K_{\text{rot}, \Delta} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (d_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i d_i^2 \right) \omega^2$$

Donc $K_{\text{rot}, \Delta} = \frac{1}{2} I_\Delta \omega^2$

Ex: énergie cinétique d'un cylindre qui roule sans glisser



Preliminaires:

$$\vec{O} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GA} \Rightarrow \vec{v}_G = \vec{\omega} \wedge \vec{AG}$$

donc $v_G^2 = \omega^2 \cdot R^2$

2^{ème} th. de König : $K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$

$$= \frac{1}{2} I_{G_3} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

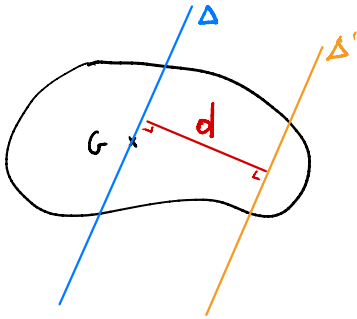
$$= \frac{1}{2} \left(\underbrace{I_{G_3} + M R^2}_{= I_{A_3}} \right) \omega^2$$

$= I_{A_3} \rightarrow$ voir ci-dessous

4) Théorème de Huygens-Steiner

En général, on connaît I_Δ pour un axe Δ qui passse par G (c.d.m.)

Que vaut $I_{\Delta'}$ pour un axe $\Delta' \parallel \Delta$?



$$I_{\Delta'} = I_{\substack{\Delta \\ G \in \Delta}} + \underbrace{M d^2}_{\text{mom. d'inertie p/n à } \Delta' \text{ d'une masse } M \text{ située en } G}$$

où M masse totale

d = distance entre Δ' et Δ

mom. d'inertie p/n à Δ' d'une masse M située en G

Rmq: pour une direction donnée, le moment d'inertie est minimisé quand l'axe passe par G

IV) Tenseur d'inertie

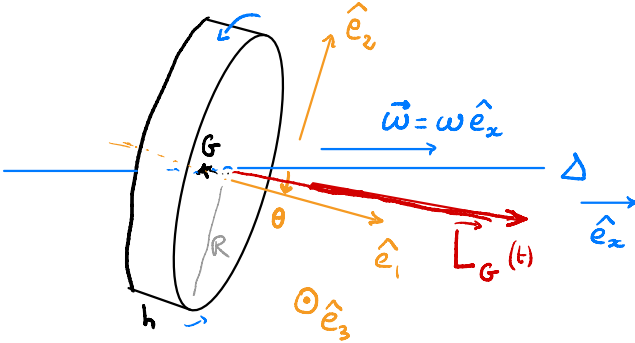
1) Repère principal d'inertie

Pour un solide quelconque, il existe toujours un repère centré en G orthonormé $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ tel que s'il tourne autour d'une de ces directions alors $\underline{\underline{L}} \parallel \underline{\underline{\omega}}$

Complément : Pour $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$ quelconque :

$$\vec{L}_G = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

3) Ex : roue mal montée : Cylindre qui tourne autour d'un axe passant par G mais pas parallèle à $\hat{e}_1$ ($\theta = \text{constante}$)

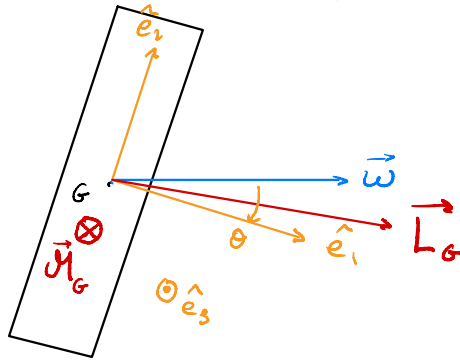


$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2$$

$$= \omega \cos \theta \hat{e}_1 + \omega \sin \theta \hat{e}_2$$

d'où :

$$\vec{L}_G = I_1 \omega \cos \theta \hat{e}_1 + I_2 \omega \sin \theta \hat{e}_2$$



Cylindre homogène :

$$I_1 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_2 = I_3 = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M h^2$$

Si $h < R$ alors $I_1 > I_2, I_3$

$$h \ll R \quad I_1 = 2 I_2$$

Quels sont les moments de force qui s'exercent en G ?

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \frac{d}{dt} \vec{L}_G = I_1 \omega \cos \theta \dot{\hat{e}}_1 + I_2 \omega \sin \theta \dot{\hat{e}}_2 \quad (\text{th. du mom. cin. en G})$$

$$\text{or } \dot{\hat{e}}_1 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_1 = -\omega \sin \theta \hat{e}_3 \quad \text{et} \quad \dot{\hat{e}}_2 = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_2 = \omega \cos \theta \hat{e}_3$$

$$\text{donc } \vec{M}_G^{\text{ext}} = \omega^2 \sin \theta \cos \theta (I_2 - I_1) \hat{e}_3(t) \rightarrow \text{cause vibration et usure !}$$