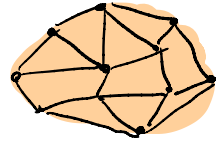


Combien de degrés de liberté
(en l'absence de contraintes externes)



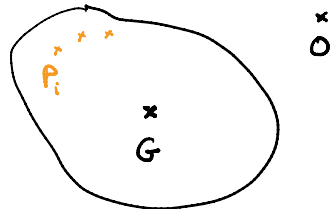
→ rotation du solide autour de $x, y, z \rightarrow 3^t = 6$

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\text{tot}} &= \sum_i \vec{F}_i \quad (13) & \text{et} & \quad \vec{L}_{O, \text{tot}} = \sum_i \vec{M}_{O,i}^{\text{ext}} \quad (13) \\ \downarrow & & \downarrow & \\ = m \vec{v}_G & & = \vec{I}^{(O)} \cdot \vec{\omega} & \end{aligned}$$

matrice 3×3 qui dépend du choix de O .

Soit O un point quelconque. Le moment du poids en O est :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_o^{(m\vec{g})} &= \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \vec{g} = \sum_i \vec{OG} \wedge m_i \vec{g} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{GP}_i}_{=\vec{0}} \wedge \vec{g} \\ &= \vec{OG} \wedge M_{\text{tot}} \vec{g}\end{aligned}$$



$$\vec{r}_G = \vec{OG}$$

$$\vec{r} = \vec{OP_i} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$$

Rem. 2 : $\vec{\pi}_G = \int dx \int dy \int dz \, g(\vec{r}) \vec{r}$

où $\rho(\vec{r})$: densité volumique

En pratique : pour un solide homogène ayant un centre de symétrie C , alors $G = C$

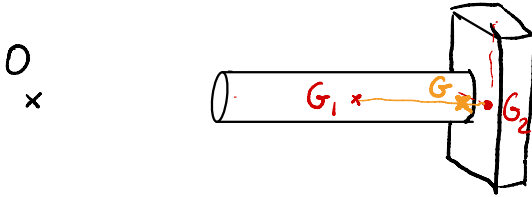
(ex : boule, cylindre, parallélépipède)

Rem. 3 : Si un solide peut être décomposé en morceaux de masses $M_1, M_2, \dots$ et de c.d.m. $G_1, G_2, \dots$ alors

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M_{\text{tot}}} (M_1 \vec{r}_{G_1} + M_2 \vec{r}_{G_2} + \dots)$$

$$\vec{r}_G = \vec{OG}$$

$$\vec{r}_{G_i} = \vec{OG_i}$$



I) Cinématique du solide

1) Champ des vitesses

- ↳ l'ensemble des vitesses instantanées de chaque point du solide
- ↳ peut-être extrapolé/défini dans tout l'espace

Si A et P sont deux points du solide $\rightarrow |\vec{AP}| = \text{constante}$

Donc il existe à chaque instant un vecteur vitesse de rotation instantanée $\vec{\omega}(t)$ tel que

$$\forall A, P \in \text{solide}, \quad \dot{\vec{AP}} = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{AP}$$

Soit O un point fixe dans $\mathcal{R}$. La vitesse de P ($\in$ solide) dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{OP}} = \dot{\vec{OA}} + \dot{\vec{AP}} = \vec{v}_A + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{AP}$$

$\forall A, P \in \text{solide}$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{AP}$$

Le champ des vitesses est entièrement déterminé par

- (i) la vitesse d'un point du solide $\rightarrow 3$ composantes
- (ii) et le vecteur $\vec{\omega}(t)$ $\rightarrow 3$ composantes

2) Centre instantané de rotation

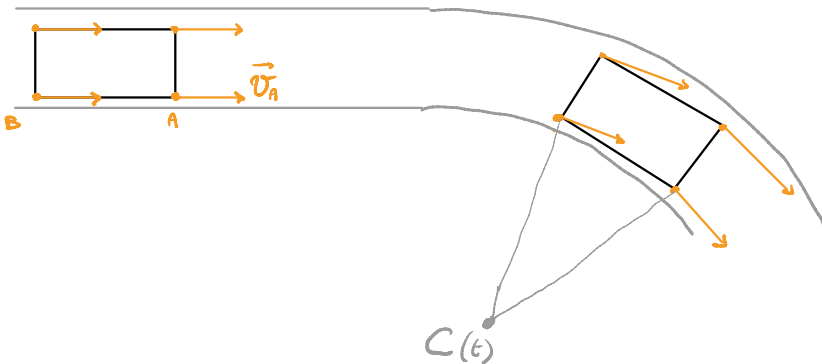
Déf: Mvt. plan sur plan : il existe un plan du solide qui reste fixe dans $\mathcal{R}$

ex: cylindre qui roule sans glisser

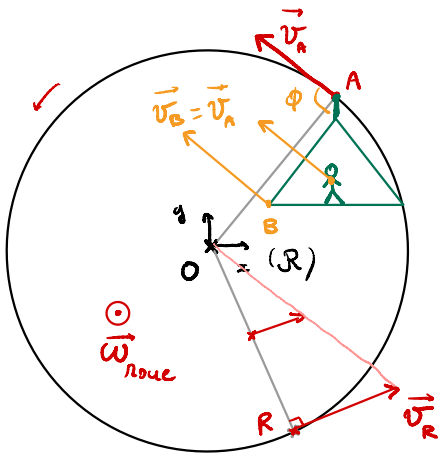
Le champ des vitesses est alors soit :

- (i) une translation si $\vec{\omega}(t) = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_P \quad \forall A, P \in \text{solide}$
- (ii) une rotation autour d'un centre instantané de rotation $C(t)$ tel que
$$\vec{v}_C(t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_P = \vec{\omega}(t) \wedge \vec{CP} \quad \forall P \in \text{solide}$$

Ex: voiture sur route plane



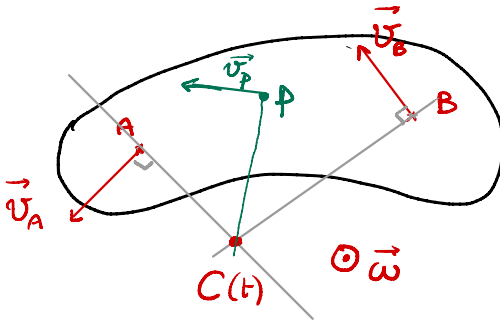
Ex: grande roue: 2 solides $\rightarrow$ roue $\rightarrow$ rotation, O centre
 $\rightarrow$ nacelle $\rightarrow$ translation



$\mathcal{R} = \text{sol}$

3) Construction du centre instantané de rotation $C(t)$ tel que $\vec{v}_{C(t)} = \vec{0}$

a) Méthode graphique: on connaît 2 vitesses non colinéaires



$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{CA}$$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{CP}$$

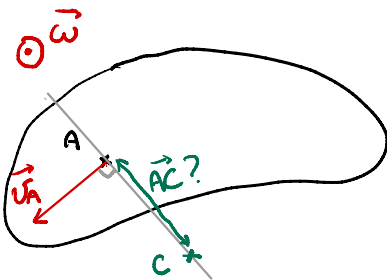
b) Méthode vectorielle: on connaît $\vec{\omega}(t)$ et la vitesse d'un point $\vec{v}_A(t)$

$\rightarrow$ on cherche $\vec{AC}$ où $\vec{v}_{C(t)} = \vec{0}$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{CA}$$

$$\text{On a } |\vec{v}_A| = |\vec{AC}| \cdot |\omega| \Rightarrow |\vec{AC}| = \frac{v_A}{|\omega|}$$

D'autre part $\vec{AC} \perp \vec{v}_A$ et $\perp \vec{\omega}$

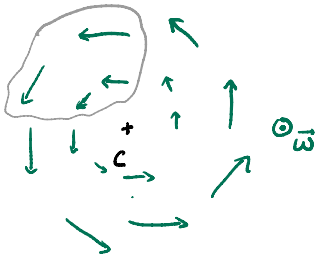


d'où $\vec{AC} = \lambda \vec{\omega} \wedge \vec{v}_A \rightarrow |\vec{AC}| = \lambda \cdot |\omega| \cdot |\vec{v}_A|$

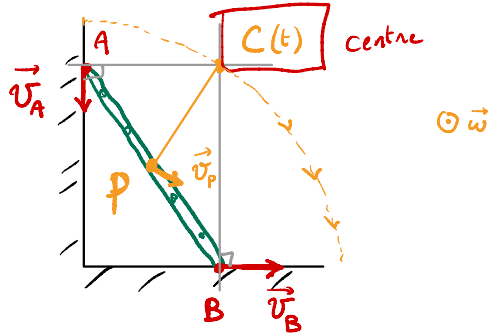
Pour que $|\vec{AC}| = \frac{v_A}{|\omega|}$ il faut choisir $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$

Donc $\vec{AC} = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\vec{\omega}}{\omega} \wedge \vec{v}_A \right)$

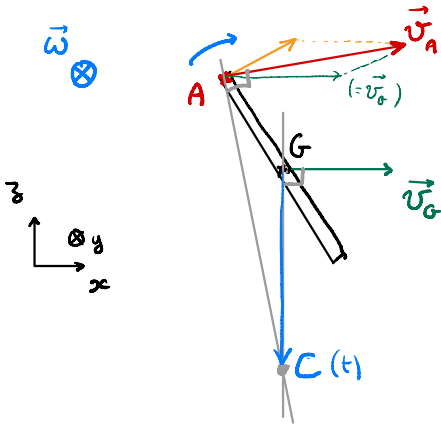
Ex: échelle qui glisse



Rotation instantanée : $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{CP}$



Ex lancer d'une barre $(\vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GA})$



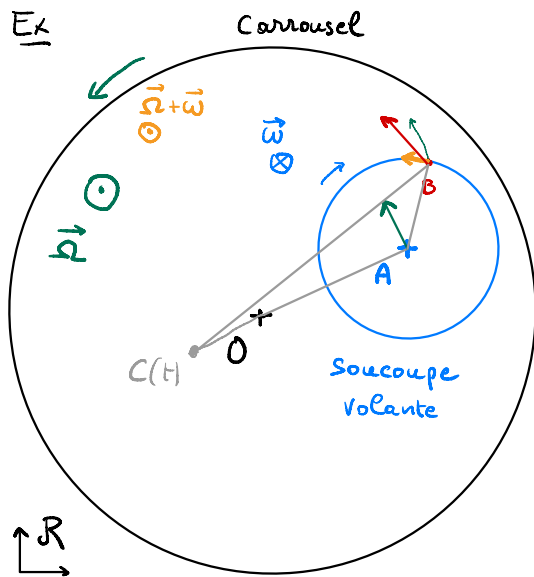
$$\vec{GC} = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_G) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2} (\omega \hat{e}_y \wedge v_G \hat{e}_x)$$

$$= - \frac{v_G}{\omega} \hat{e}_z$$

4) Addition des vecteurs rotations

Si un solide A est en rotation $\vec{\omega}_{A/B}$ p/n à un solide B qui lui-même est en rotation $\vec{\omega}_B$ p/n à $\mathcal{R}$, alors le vecteur vitesse de rot. inst. de A p/n à $\mathcal{R}$ est $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{A/B} + \vec{\omega}_B$



$$\text{Vitesse de A : } \vec{v}_A = \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} \quad \checkmark$$

Vitesse de B (dans $\mathcal{R}$) :

$$\begin{aligned} * \vec{v}_B &= \vec{v}_A + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{AB} \\ &= \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \\ &= \vec{\Omega} \wedge \vec{OB} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \vec{v}_B &= \vec{v}_C + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \wedge \vec{CB} \\ &= \vec{\Omega} \wedge \vec{CB} + \vec{\omega} \wedge \vec{CB} \end{aligned}$$

(On obtient l'équation : $\vec{\Omega} \wedge \vec{CO} + \vec{\omega} \wedge \vec{CA} = \vec{0}$ $\rightarrow$ permet de trouver C)

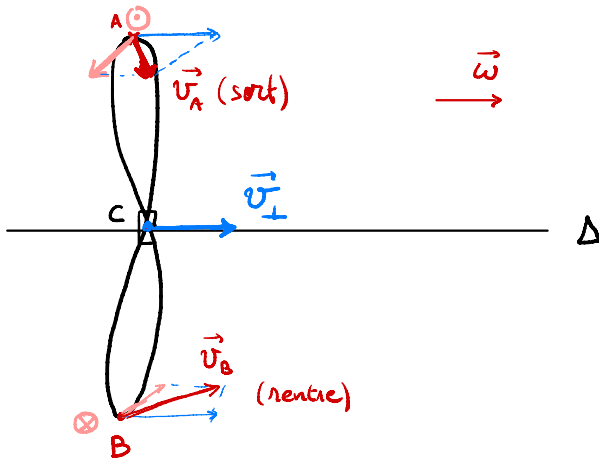
5) Mouvement hélicoïdal

S'il existe un plan du solide qui est en translation dans $\mathcal{R}$ perpendiculairement à lui-même, alors le mvt. est hélicoïdal

Dans ce cas, tous les points de l'axe instantané de rotation ont une même vitesse, pointant selon cet axe

Ex: personne qui monte un escalier en colimaçon

Ex: hélice d'avion

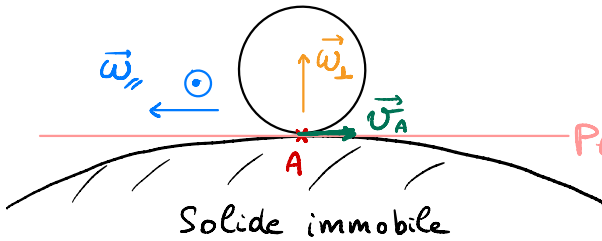


Champ des vitesses

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\perp + \vec{\omega} \wedge \vec{CP}$$

où $C \in \Delta$

6) Solides en contact



On considère un solide en contact avec un autre (fixe) en un seul point A.

Plan tangent aux 2 solides en A

A ∈ solide en mvt.

* $\vec{v}_A$ est appelée vitesse de glissement

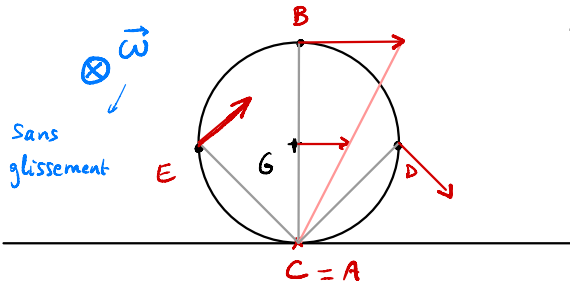
↳ "sans glisser" $\Leftrightarrow \vec{v}_A(t) = \vec{0}$

* La composante $\vec{\omega}_\parallel$ de $\vec{\omega} \in$ plan tangent est appelée vitesse de roulement

* La composante $\vec{\omega}_\perp$ de $\vec{\omega} \perp$ plan tangent est appelée vitesse de pivotement (ex: toupie verticale)

Cas important : roulement sans glissement ($\vec{v}_A = \vec{0}$)

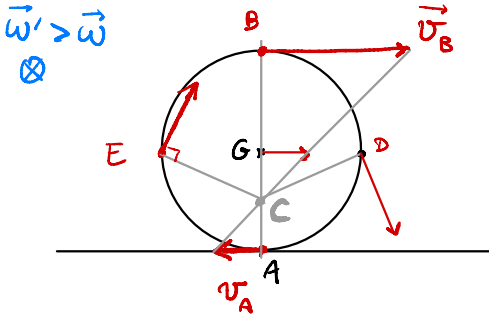
↳ Alors, le centre instantané de rotation est le point de contact (si l'autre solide est immobile !)



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{CP} \quad \text{où} \quad \vec{v}_C = \vec{0}$$

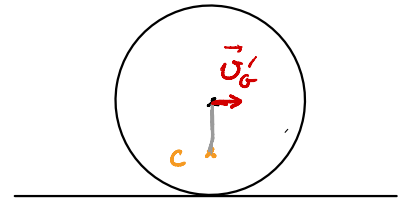
→

Ex : voiture démarre en dérapant.

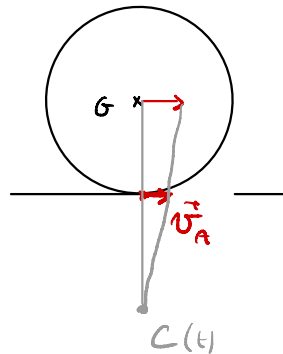


$$\vec{AC} = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A)$$

Si $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ alors $v'_G < v_G$
 dérap. sans gliss.



Freinage + dérap.



$$\omega'' < \omega$$