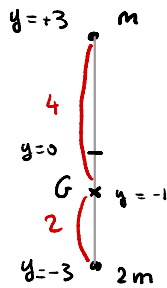


Quiz 1

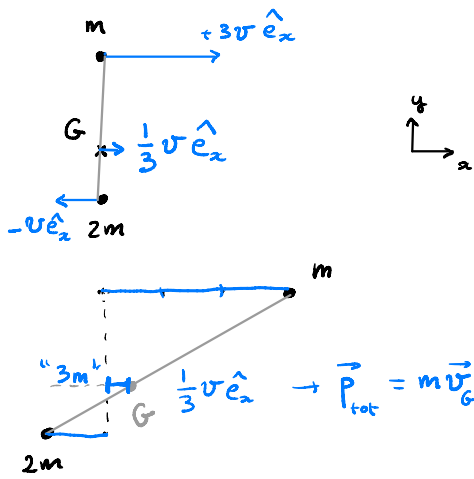
Position du centre de masse



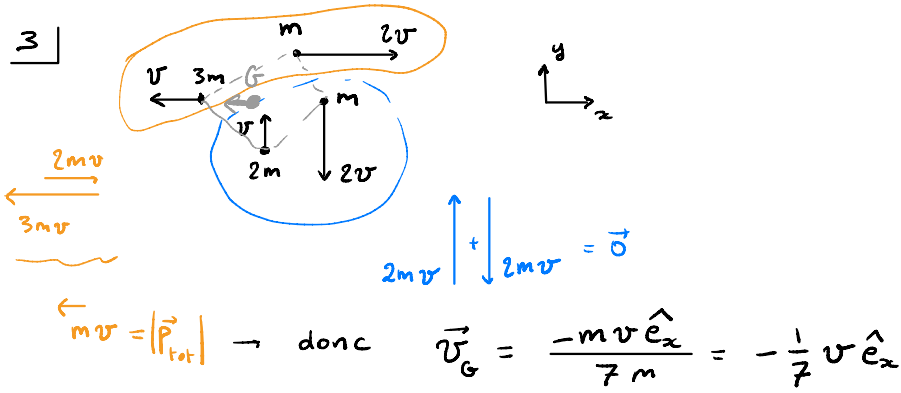
$$y_G = \frac{m \cdot 3 + 2m \cdot (-3)}{3m} = -\frac{3m}{3m} = -1$$

2 Vitesse du c.d.m ?

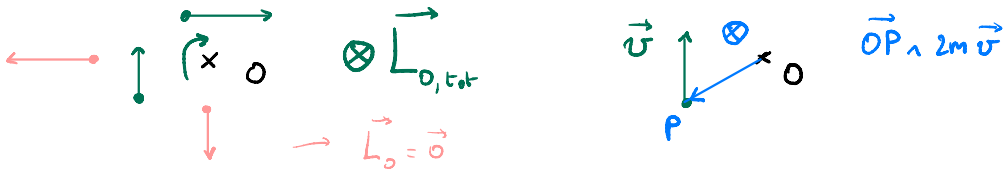
$$\begin{aligned} \vec{v}_G &= \frac{2m(-v\hat{e}_x) + m3v\hat{e}_x}{3m} \\ &= \frac{-2mv + 3mv}{3m} \hat{e}_x \\ &= \frac{1}{3}v\hat{e}_x \\ \vec{p}_{tot} &= (2m+m)\vec{v}_G \\ &= 3m \frac{1}{3}v\hat{e}_x = mv\hat{e}_x \end{aligned}$$



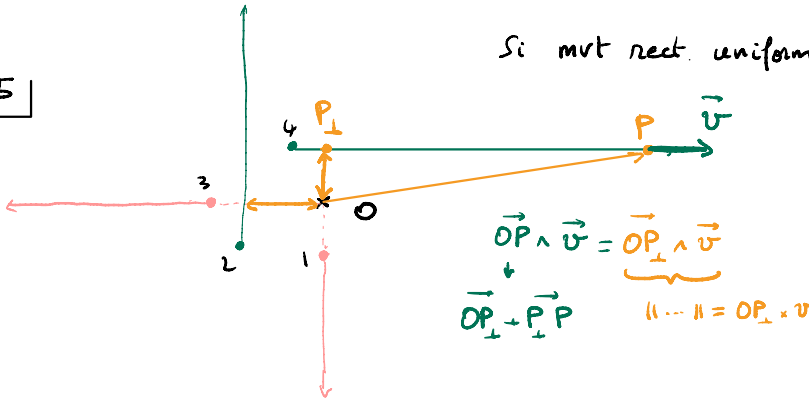
3



4



5



Si mvt rect. uniforme $\rightarrow \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\vec{M}_{O,i}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_{O,i}^{\text{ext}} = \vec{0}$$

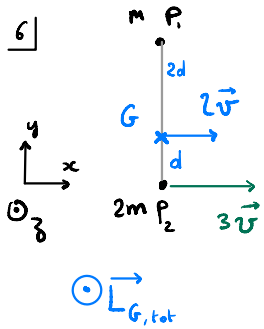
$$\frac{d\vec{L}_{O,\text{tot}}}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{OP} \wedge \vec{v} = \vec{OP}_\perp \wedge \vec{v}$$

$$\vec{OP}_\perp = \vec{P} - \vec{P}_\perp$$

$$\|\dots\| = \|\vec{OP}_\perp\| \cdot v$$

6



$$\vec{v}_G = \frac{m \cdot \vec{0} + 2m \cdot 3\vec{v}}{3m} = 2\vec{v}$$

$$\vec{L}_G = \vec{GP}_1 \wedge (m \cdot \vec{0}) + \vec{GP}_2 \wedge (2m \cdot 3\vec{v} \hat{e}_x)$$

$$= \vec{0} + -d\hat{e}_y \wedge 6m\vec{v} \hat{e}_x$$

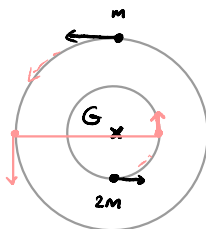
$$= \underline{6mvd \hat{e}_z}$$

Def: $\mathcal{R}^*$ = référentiel du c.d.m = en translation p/n à $\mathcal{R}$ dans lequel G est fixe

Hypothèse : $\sum \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \rightarrow$ décrire le mouvement.

1) $\vec{P}_{\text{tot}}$ est conservée $\Rightarrow \vec{v}_G = \text{constante}$

2) Dans $\mathcal{R}^*$, G est fixe $\rightarrow$ mvt de P_1 et P_2 est circulaire



Comme $\sum \vec{M}_G^{\text{ext}} = \vec{0}$

$$\vec{L}_G = \text{constante}$$

III) Lois de conservation

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}_{\text{tot}} = \text{cste}$$

$$\sum_i \vec{M}_{O,i}^{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_{O,\text{tot}} = \text{cste}$$

on parle de système isolé

Plus généralement, pour une direction $\hat{u}$ ($\hat{e}_x, \hat{e}_y, \dots$) quelconque

$$\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} \cdot \hat{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

$$(\sum_i \vec{M}_{O,i}^{\text{ext}}) \cdot \hat{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{O,\text{tot}} \cdot \hat{u} = \text{constante}$$

Ex 1: chariot + boulet → vitesse finale du chariot

• Système = chariot + boulet

• Réf = auditoire

$$(\sum \vec{F}^{\text{ext}}) \cdot \hat{e}_x = 0$$

• Force externe → aucune selon $\hat{e}_x$

$$\hookrightarrow \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \vec{e}_x = \text{constante} = 0 \text{ (initiale)}$$

$$\text{or } P_x = m_b v_{b,x} + m_c v_{c,x} = 0$$

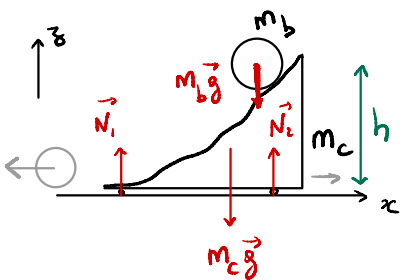
$$N_{1,z} + N_{2,z} \neq (m_b + m_c)g$$

donc
$$v_{b,x} = -\frac{m_c}{m_b} v_{c,x} \quad (1)$$

* Si on néglige les frottements, l'énergie mécanique totale est conservée car $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$ ne travaillent pas

et les poids sont conservatifs

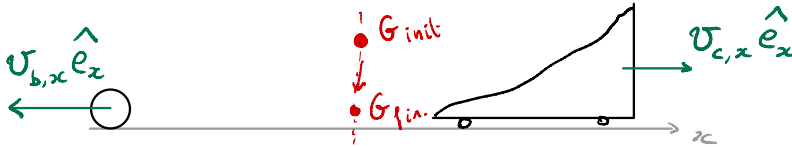
$$E_{\text{tot}} = K_b + K_c + V_b + V_c = \text{cste}$$



On en déduit : $K_{\text{tot, fin.}} - K_{\text{tot, init.}} = V_{\text{tot, init.}} - V_{\text{tot, fin.}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} m_b (\vec{v}_{b,x})^2 + \frac{1}{2} m_c (\vec{v}_{c,x})^2 - 0 = m_b g h} \quad (2)$$

ici $|\vec{v}_b|^2 = (v_{b,x})^2$ car les vitesses finales sont selon x .



D'après (1) : $v_{b,x}^2 = \frac{m_c^2}{m_b^2} v_{c,x}^2$, en injectant dans (2) :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{m_c^2}{m_b} + m_c \right) v_{c,x}^2 = m_b g h$$

$$\frac{1}{2} \frac{m_c}{m_b} \left(\frac{m_c}{m_b} + 1 \right) v_{c,x}^2 = g h$$

On pose $\eta = \frac{m_c}{m_b}$, alors $v_{c,x}^2 = \frac{2 g h}{\eta (1 + \eta)}$, ici $v_{c,x} = \sqrt{\frac{2 g h}{\eta (1 + \eta)}}$

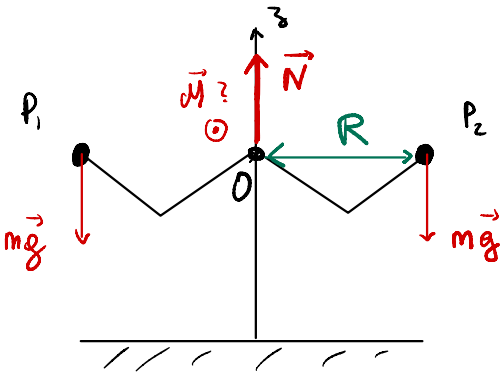
et d'après (1) $v_{b,x} = -\eta v_{c,x} = -\sqrt{\frac{\eta 2 g h}{1 + \eta}}$

Cas limites :

- $m_c \gg m_b$ ($\eta \rightarrow \infty$) alors $v_{c,x} = 0$ et $v_{b,x} = -\sqrt{2 g h}$
- $m_c \ll m_b$ ($\eta \rightarrow 0$) alors $v_{c,x} = +\infty$ et $v_{b,x} = 0$
- $m_c = m_b$ ($\eta = 1$) alors $v_{c,x} = \sqrt{g h}$ et $v_{b,x} = -\sqrt{g h}$

Attention : il faudrait démontrer que le travail des forces internes s'annule ! (cf : table à trous)

Ex 2 : tabouret tournant



Système : 2 masses +
personne + tabouret
(sans masse)

Ref auditoire (galiléen)

Forces externes : poids
liaisons

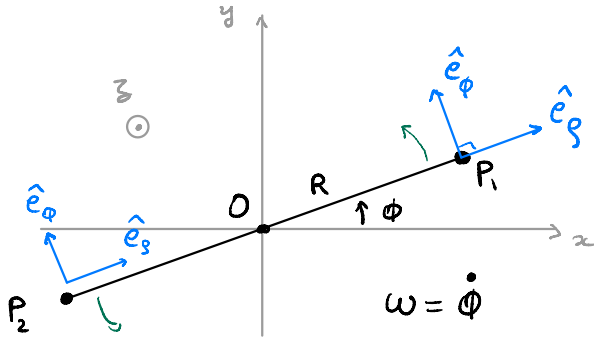
Aucune des forces externes
n'a de moment selon $\hat{e}_z$ si
on néglige de frottement.

On peut utiliser la conservation du moment cinétique selon z
↳ trouver une relation entre ω_i et ω_f selon R_i et R_f .

Vue de dessus

$$\sum_i \vec{M}_{0,i} \cdot \hat{e}_z = 0$$

$$\text{donc } \vec{L}_{0,\text{tot}} \cdot \hat{e}_z = \text{constante.}$$



$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{OP}_1 \wedge m \vec{v}_1 + \vec{OP}_2 \wedge m \vec{v}_2 = R \hat{e}_r \wedge m R \omega \hat{e}_\phi + (-R \hat{e}_r) \wedge m (-R \omega \hat{e}_\phi) \\ &= 2 m R^2 \omega \hat{e}_z = I_0 \omega \hat{e}_z \quad \text{où } I_0 = 2 m R^2 \text{ est le} \\ &\quad \text{moment d'inertie p/r à O} \end{aligned}$$

$$\text{en particulier } \vec{L}_0 \cdot \hat{e}_z = 2 m R^2 \omega = \text{constante}$$

$$\text{Donc : } R_{\text{fin}}^2 \omega_{\text{fin}} = R_{\text{init}}^2 \omega_{\text{init}} \Leftrightarrow$$

$$\omega_{\text{fin}} = \omega_{\text{init}} \times \frac{R_{\text{init}}^2}{R_{\text{fin}}^2}$$

Qu'en est-il de l'énergie cinétique ? (donc de l'énergie méca.)

$$K_{\text{init}} = \frac{1}{2} m \omega_{\text{init}}^2 R_{\text{int}}^2 \times 2 \quad , \quad K_{\text{fin}} = \dots$$

$$\frac{K_{\text{fin}}}{K_{\text{init}}} = \frac{\omega_f^2 R_f^2}{\omega_i^2 R_i^2} = \frac{R_i^2}{R_f^2} \quad \text{si } R_f < R_i \text{ alors } K \text{ augmente}$$

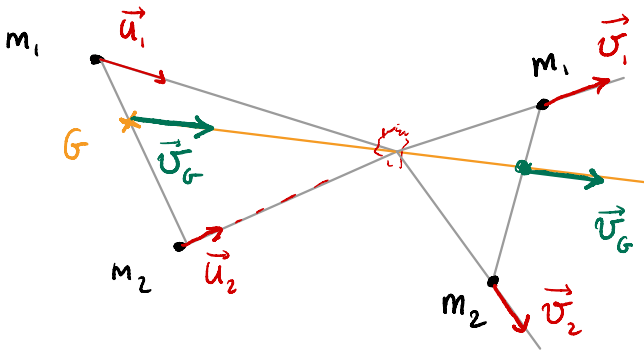
donc il y a un travail des forces internes.

IV) Collisions

On considère 2 (ou plus) points matériels interagissant pendant un temps très court.

1) Si les forces externes restent nulles ou constantes pendant la collision, on peut utiliser :

- la conservation de la qte de mvt. totale
- la conservation du mom. cin. total ($\rightarrow$ solide)



$$\vec{P}_{\text{tot}} = \text{cste}$$

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Dans un choc "mou", les pts mats fusionnent $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_f$

alors :
$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_c$$

2) Variation d'énergie mécanique pendant la collision ?

↳ dépend si les forces internes sont

a) conservatives → choc élastique → énergie cinétique conservée

b) non-conservatives → choc inélastique

* l'énergie cinétique diminue → dissipation

(* ————— augmente lors d'une explosion)

Exemples : voir notes de cours photocopiées sur moodle.