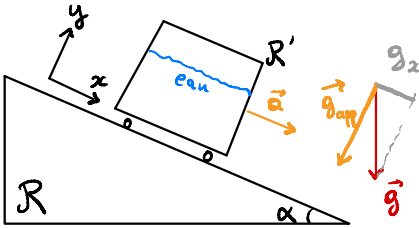


Ch.6 - Changements de référentiels

III.1) Réf. en translation accéléré $\vec{a} \rightarrow \vec{g}_{opp} = \vec{g} - \vec{a}$

a) Chariot glissant sans frottement sur un plan incliné $\rightarrow R'$



Trouver $\vec{a}$?

Système : chariot, masse M

PFD selon x : $M a = M \vec{g} \cdot \vec{e}_x = M g_x$

donc $\vec{a} = g_x \hat{e}_x$

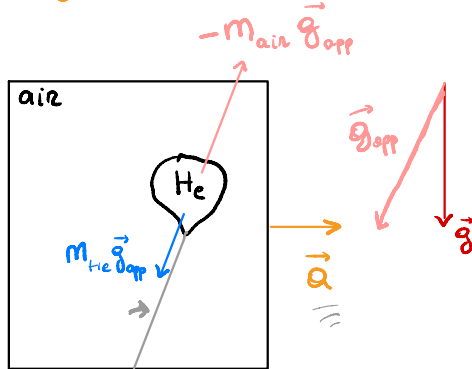
Ainsi, poids apparent : $\vec{g}_{app} = \vec{g} - \vec{a} = g_x \hat{e}_x + g_y \hat{e}_y - g_x \hat{e}_x$

$= g_y \hat{e}_y = -(\cos \alpha) g \hat{e}_y$

$\vec{g}_{app} \perp$ plan incliné, $|\vec{g}_{app}| < g$

b) "accéléromètre à ballon"

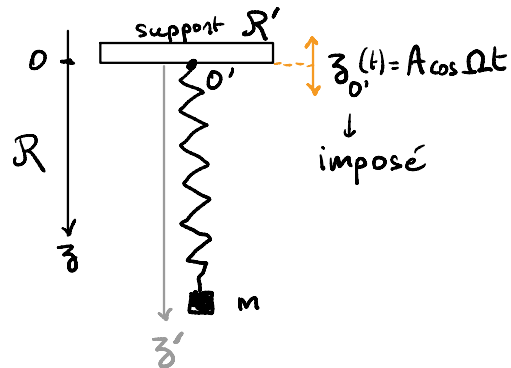
$\vec{P}_{arch.} = -$ poids fluide déplacé



c) Ressort agité de façon périodique

accélération de R' p/r à R :

$\ddot{z}_{0'} = -A \Omega^2 \cos \Omega t = a_0$



Forces dans $\mathcal{R}'$:

- * poids : $m\vec{g} = mg\hat{e}_z$
- * ressort : $-k(z' - l_0)\hat{e}_z$
- * entraînement $-m\vec{a}_o = mA\Omega^2 \cos \Omega t \hat{e}_z$

Eq du mvt : $m\ddot{z}' = mg - k(z' - l_0) + mA\Omega^2 \cos \Omega t$

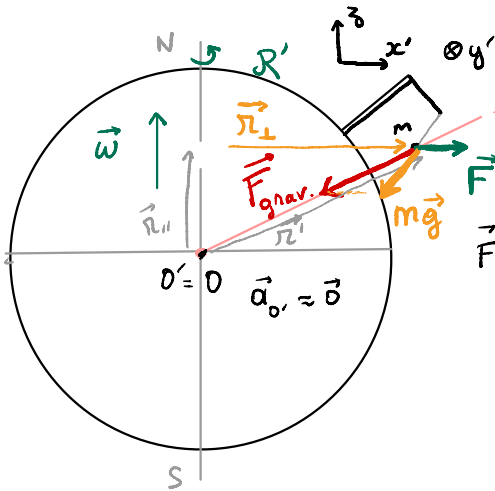
$$\ddot{z}' + \omega_0^2 z' - g - \frac{k l_0}{m} = \underbrace{A\Omega^2 \cos \Omega t}_{\text{terme de forçage}}$$

Attention : $z(t) = z'(t) + z_o(t)$

2) Réf. en rotation uniforme ($\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ constant) $\rightarrow$ phénomène terrestre

a) Champ de pesanteur $\vec{g}$ et direction verticale

* Faire l'hypothèse que la surface des océans est parfaitement sphérique.



$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$$

$\vec{F}^{(c)} \rightarrow$ norme $m\omega^2 r_{\perp}$

$$\vec{F}^{(c)} = -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \quad \vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{\parallel}$$

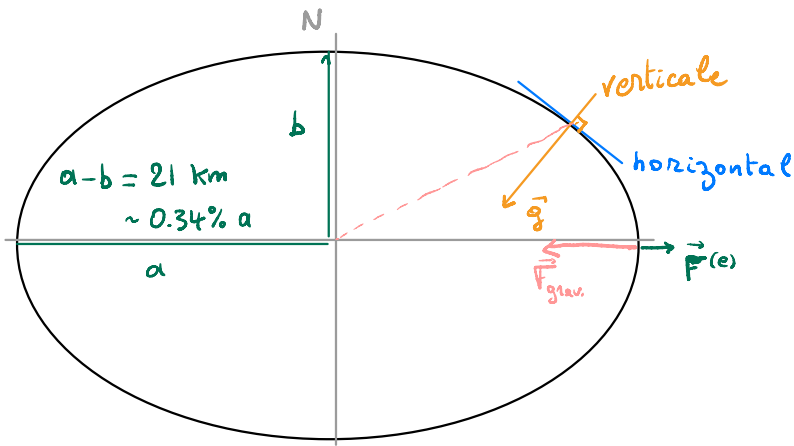
$$= -m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\perp})$$

$$= -m \vec{\omega} \wedge \omega r_{\perp} \hat{e}_y$$

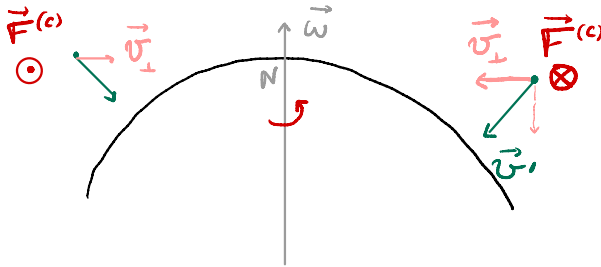
$$= + m \omega^2 r_{\perp} \hat{e}_x$$

$$\text{or } \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{\parallel} = \vec{0}$$

En réalité, les océans s'adaptent à $\vec{g}$ localement :



b) Force de Coriolis : Ex: chute libre sur Terre.

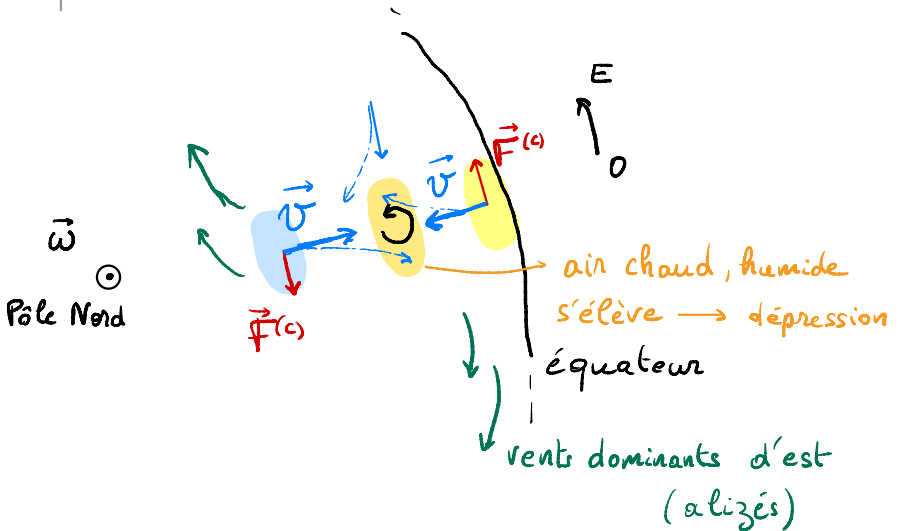


$$\vec{F}(c) = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

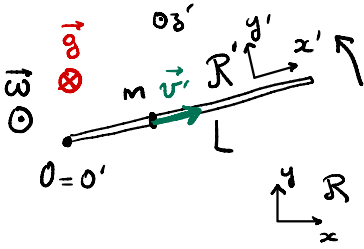
$$= -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\perp}$$

Déviaton vers l'est

c) Cyclones



Exercice : Un pt. mat. glisse le long d'une tige en rotation dans un plan horizontal. Il est initialement proche de l'axe O' .



de l'axe O' .

Calculer la vitesse quand il quitte la tige.

On se place dans $R' = \text{tige}$

Contraintes : $y' = 0, z' = 0 \rightarrow$ Force de liaison $N_y \hat{e}_y + N_z \hat{e}_z$,

* Poids : $m\vec{g} = -mg \hat{e}_z$,

* $\vec{F}^{(e)} = m\omega^2 x' \hat{e}_x$ (centrifuge) $\rightarrow$ travail non nul

* $\vec{F}^{(c)} = -2m\omega \hat{e}_z \wedge \dot{x}' \hat{e}_x = -2m\omega \dot{x}' \hat{e}_y \perp \vec{v}'$

Or $\vec{F}^{(e)}$ est conservative car elle dérive du potentiel :

$$V(x') = -\frac{1}{2} m\omega^2 x'^2$$

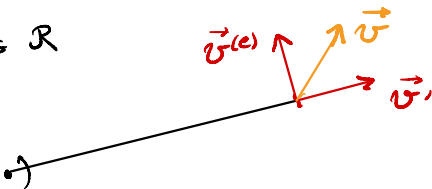
$$\left(-\frac{dV}{dx'} \hat{e}_x = \vec{F}^{(e)} \right) \quad \text{démonstration}$$

Th. én. cin. dans R' : $K_f' - K_i' = V(x'=0) - V(x'=L)$

$$\frac{1}{2} m \vec{v}_f'^2 = -\left(-\frac{1}{2} m\omega^2 L^2 \right)$$

$$|\vec{v}_f'| = \omega L$$

Dans R



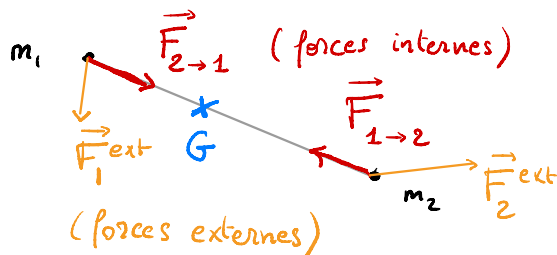
$$\vec{v}' = \omega L \hat{e}_x$$

$$\vec{v}_e = \omega L \hat{e}_y$$

I) Problème à deux corps

Ex : 2 étoiles liées par la gravité

2 masses liées par un ressort



$$(1) m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_1^{\text{ext}}$$

$$(2) m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$$

↕ couplées car $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ dépend de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Méthode générale

a) $(1) + (2)$ $\frac{d^2}{dt^2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$ car $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \vec{0}$

(3^{ème} loi)

$$\Leftrightarrow M_{\text{tot}} \ddot{\vec{r}}_G = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$$

où

$$M_{\text{tot}} = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M_{\text{tot}}}$$

centre de masse

Le c.d.m. se déplace comme un pt. mat. de masse M_{tot} ne subissant que les forces externes.

b) $m_2 \cdot (1) - m_1 \cdot (2)$ $m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = m_2 \vec{F}_{2 \rightarrow 1} - m_1 \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \left(+ \vec{F}_{1,2}^{\text{ext}} \right)$

+ $m_1 \vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

si $\vec{F}_{1,2}^{\text{ext}} = \vec{0}$:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} + m_2 \vec{F}_2^{\text{ext}} - m_1 \vec{F}_1^{\text{ext}}$$

où

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M_{\text{tot}}}$$

est la masse réduite

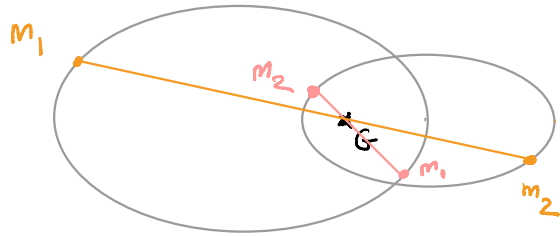
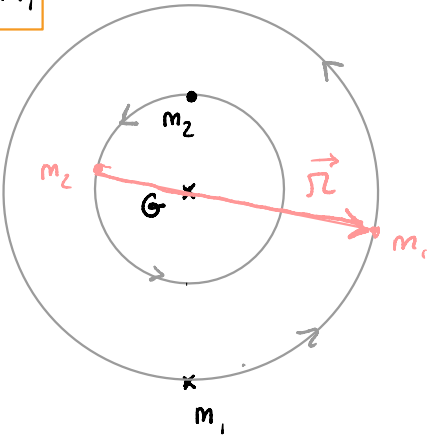
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ est la position relative} = \vec{P_2 P_1}$$

Pour la gravité : $\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \Leftrightarrow \ddot{\vec{r}} = -G \frac{M_{\text{tot}}}{r^2} \hat{e}_r$

Même éq. que pour le mvt. autour d'une masse M_{tot} fixe

Mais les 2 étoiles tournent autour de G ($\vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}} = \vec{0}$)

$$m_2 \simeq 2 m_1$$



Rmq: calcul du c.d.m. $\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M_{\text{tot}}}$

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OP}_1 + m_2 \vec{OP}_2}{M_{\text{tot}}}$$

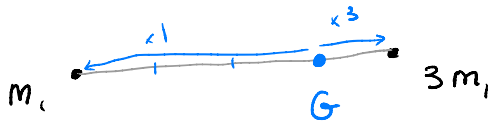
$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M_{\text{tot}}}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{M_{\text{tot}}}$$

⋮

ou bien prendre $O = G$:

$$\vec{0} = m_1 \vec{GP}_1 + m_2 \vec{GP}_2$$



II) N points matériels

1) Définitions

On considère 1 système constitué de N pts mat. P_i
de masses m_i

Deux catégories de force :

* Forces internes entre les pts du systèmes :

3ème loi

$$\vec{F}_{j \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow j}$$

* Forces externes : $\vec{F}_i^{\text{ext}} \rightarrow \vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$

* Quantité de mvt totale

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M_{\text{tot}} \vec{v}_G$$

* Moment cinétique total p/n à 0 : $\vec{L}_{0, \text{tot}} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

* Centre de masse G :

$$\vec{OG} = \frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i \vec{OP}_i$$

où $M_{\text{tot}} = \sum_i m_i$

Remq : si $O=G$ alors

$$\sum_i m_i \vec{GP}_i = \vec{0}$$

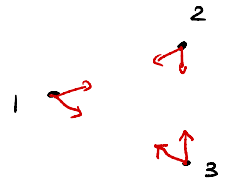
2) Equations du mvt

a) Théorème du centre de masse

2ème loi :

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_i \left(\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} \right)$$

or $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i} = \sum_{\text{paires}(i,j)} (\vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{F}_{i \rightarrow j}) = \vec{0}$



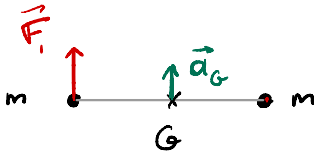
Donc

$$\dot{\vec{p}}_{\text{tot}} = M_{\text{tot}} \dot{\vec{v}}_G = \vec{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$$

(ne dépend pas des points d'application des forces)

La trajectoire du c.d.m est celle d'un pt mat de masse M_{tot} qui subit la somme des forces externes

Ex: 2 masses liées par une tige rigide, sans masse.



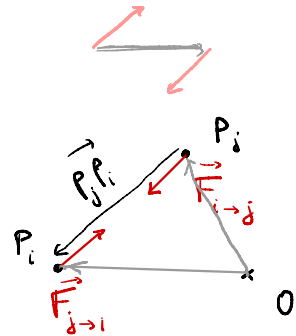
b) Th. du moment cinétique p/r à O

$$\dot{\vec{L}}_{O,\text{tot}} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i})$$

$$\text{or : } \sum_{\text{paires } (i,j)} \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{OP}_j \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j}$$

$$= \sum_{(i,j)} (\vec{OP}_i - \vec{OP}_j) \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$$

$$\vec{P_j P_i} \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0} \quad \text{lorsque } \vec{F}_{j \rightarrow i} \parallel \vec{P_j P_i}$$



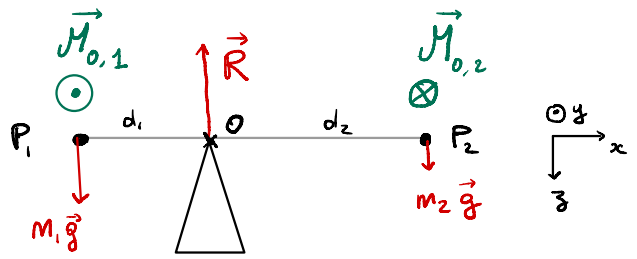
Donc :

$$\dot{\vec{L}}_{O,\text{tot}} = \sum_i \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \vec{M}_{O,i}$$

Ex: équilibre statique

Forces externes ?

poids ($\times 2$) + réaction
du support



* Th. du c.d.m au système = 2 masses liées par tige sans masse
à l'équilibre : $-(m_1 + m_2)\vec{g} = \vec{R}$

* Th. du mom. cin: $\sum_i \vec{M}_{O,i} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{OP}_1 \wedge m_1 \vec{g} + \vec{OP}_2 \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -d_1 m_1 g \hat{e}_x \wedge \hat{e}_z + d_2 m_2 g \hat{e}_x \wedge \hat{e}_z = \vec{0}$$

donc

$$d_1 m_1 = d_2 m_2$$