

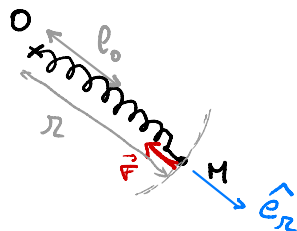
2) Energie potentielle d'une force centrale

Si une force centrale est conservative, le potentiel dont elle dérive ne dépend que de $r = |\vec{OM}|$, $\vec{F} = -\frac{dV}{dr} \hat{e}_r$ (coord. sphér.)

Ex a) Ressort attaché en O

$$V(r) = \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

$$\text{et } \vec{F} = -k (r - l_0) \hat{e}_r$$

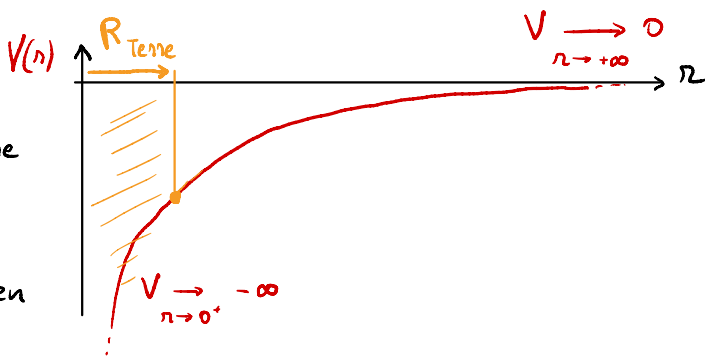


b) Force en $\frac{1}{r^2}$ (gravitation, Coulomb)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{C}{r^2} \hat{e}_r \quad \text{où } C = G m_0 \cdot m_M \text{ pour la gravitation}$$

(où $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$)

$$V(r) = -\frac{C}{r}$$



Rmq: Le potentiel hors d'une boule homogène est le même que si toute la masse était concentrée en son centre.

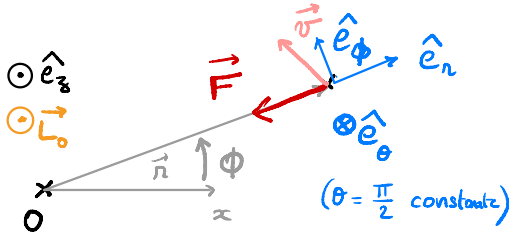
III) Mvt. dans le champ de gravitation créé par une masse fixe

* Système : pt. mat. P de masse $m \ll M$ (masse fixe en O)

* Référentiel galiléen, O fixe dans R

* Une seule force $\vec{F} = -\frac{C}{r^2} \hat{e}_r$

1) Quantités conservées



* $\vec{F}$ est conservative $\rightarrow E$ est conservée

* $\vec{F}$ est centrale $\rightarrow \vec{L}_0$ est constante

Reste 2 degrés de liberté r, ϕ + 2 équations $\frac{dE}{dt} = 0$ et $\frac{dL_0}{dt} = 0$

a) Expression du mom. cin.

$$\vec{L}_0 = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m (r \hat{e}_r) \wedge (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\phi} \hat{e}_\phi) = m r^2 \dot{\phi} \hat{e}_z$$

donc $|\vec{L}_0|^2 = m^2 r^4 \dot{\phi}^2 = L_0^2$ constante fixée par les cond. init.

$$\dot{\phi}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$$

b) Energie mécanique

$$E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + V(r) \quad \text{où} \quad \vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2 r^2}$$

$$\text{et} \quad V(r) = -\frac{C}{r}$$

$$\text{d'où} \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\left(\frac{L_0^2}{2m} \frac{1}{r^2} - \frac{C}{r} \right)}_{= V_{\text{eff}}(r)} = K(\dot{r}) + V_{\text{eff}}(r)$$

"pb à 1 dimension"

c) Potentiel effectif est ici : $V_{\text{eff}} = \frac{L_0^2}{2m r^2} - \frac{C}{r}$

Méthode générale si une composante de $\vec{L}_0$ est conservée.

limites Lorsque $r \rightarrow 0$, $V_{\text{eff}} \approx \frac{L_0^2}{2m r^2} \rightarrow +\infty$

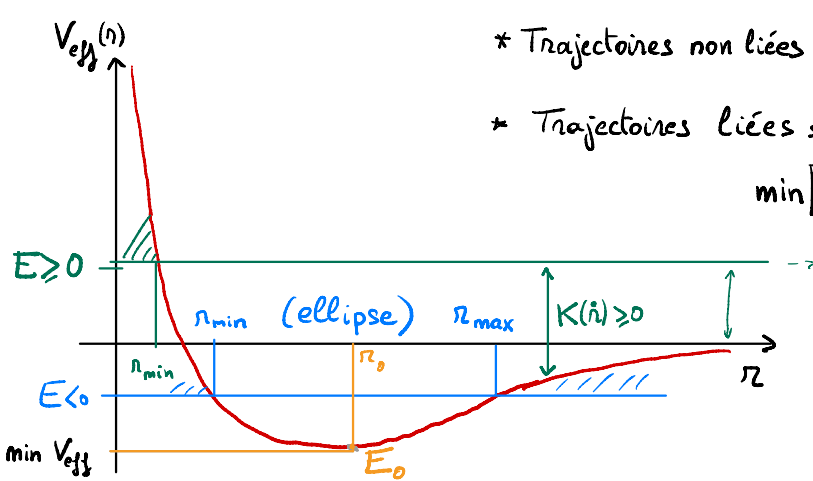
Lorsque $r \rightarrow \infty$, $V_{\text{eff}} \approx -\frac{C}{r} \rightarrow 0^-$

En outre comme $K(\dot{r}) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$ on a tjs $E \geq V_{\text{eff}}(r)$

* Trajectoires non liées si $E \geq 0$ (hyperbole ou parabole)

* Trajectoires liées si

$$\min[V_{\text{eff}}] \leq E < 0$$



* Lorsque $E = \min(V_{\text{eff}}) \rightarrow$ trajectoire circulaire.

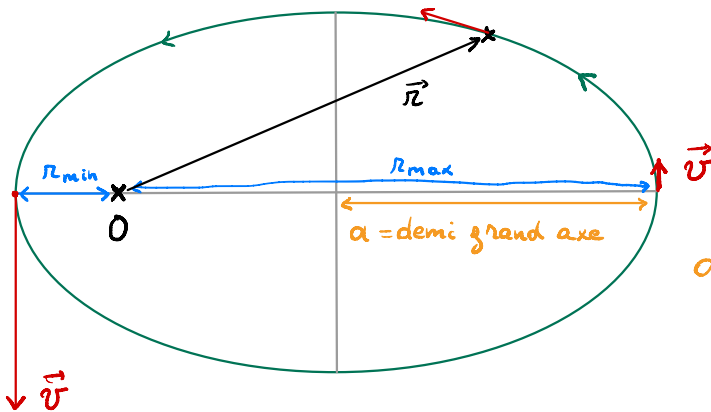
* Pour $\min V_{\text{eff}} < E < 0$, l'orbite est elliptique avec

$$r_{\min} < r < r_{\max} \quad (\text{où } K=0)$$

$r_{\min}$ = périhélie
périgée

$r_{\max}$ = aphélie
apogée

$$\hookrightarrow \text{tels que } V_{\text{eff}}(r_{\min}^{\text{min}}) = E$$



$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

2) Lois de Kepler

① Les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est un des foyers

② Loi des aires

③ Pour toutes les planètes

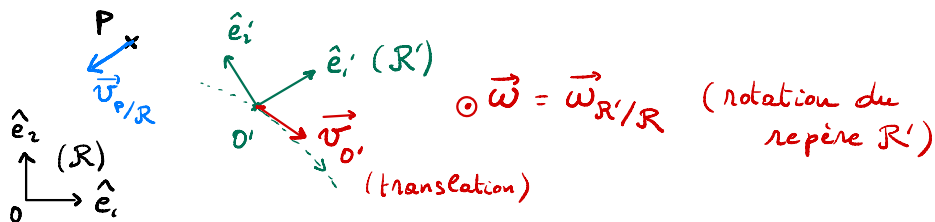
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G M_{\text{soleil}}}$$

ici T = période

(365.25 jours pour la Terre)

1) Cinématique

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $(O, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ un repère lié à $\mathcal{R}$
 $\mathcal{R}'$ un référentiel accéléré p/r à $\mathcal{R}$ et $(O', \hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ lié à $\mathcal{R}'$
 P un pt. mat. de masse m .



1) Position : Dans $\mathcal{R}$: $\vec{r} = \vec{OP} = \sum_i r_i \hat{e}_i$ et $\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{r}'$

Dans $\mathcal{R}'$: $\vec{r}' = \vec{O'P} = \sum_i r'_i \hat{e}'_i$

2) Vitesse : on note $\vec{v}_P = \vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \sum_i \dot{r}_i \hat{e}_i$ la vitesse de P dans $\mathcal{R}$
 $\vec{v}'_P = \vec{v}_{P/\mathcal{R}'} = \sum_i \dot{r}'_i \hat{e}'_i$ ————— $\mathcal{R}'$
 (relative)

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{OP}} = \dot{\vec{OO'}} + \frac{d}{dt} \left(\sum_i r'_i \hat{e}'_i \right)_{\mathcal{R}} = \vec{v}_{O'} + \underbrace{\sum_i \dot{r}'_i \hat{e}'_i}_{\vec{v}'_P} + \underbrace{\sum_i r'_i \dot{\hat{e}}'_i}_{\vec{\omega} \wedge \sum_i r'_i \hat{e}'_i}$$

Ainsi : $\vec{v}_P = \vec{v}'_P + \vec{v}_P^{(e)}$

où $\vec{v}_P^{(e)} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ est la vitesse d'entraînement = vitesse dans $\mathcal{R}$ qu'aurait un point fixe dans $\mathcal{R}'$, coïncidant avec P à l'instant t

Ex : mvt. rect. uniforme selon le rayon d'un carrousel

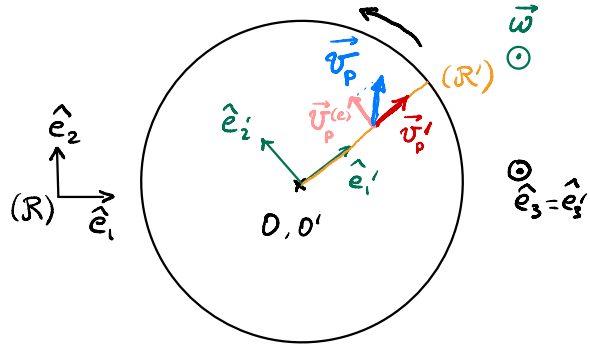
$\mathcal{R}'$ lié au carrousel

Dans $\mathcal{R}'$: $\vec{v}_p' = v_0 \hat{e}_1'$ (hypothèse)

Dans $\mathcal{R}$: $\vec{v}_p = \vec{v}_p' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$

$$= v_0 \hat{e}_1' + \omega \hat{e}_3' \wedge r_1' \hat{e}_1'$$

$$= \underline{v_0 \hat{e}_1'} + \underline{\omega r_1' \hat{e}_2'}$$



3) Accélération on note $\vec{a}_p = \sum_i \ddot{r}_i \hat{e}_i$ accélération dans $\mathcal{R}$
 $\vec{a}_p' = \sum_i \ddot{r}_i' \hat{e}_i'$ $\mathcal{R}'$ (relative)

Dans $\mathcal{R}$: $\vec{a}_p = \dot{\vec{v}}_p = \dot{\vec{v}}_p' + \dot{\vec{v}}_p^{(e)}$ avec

$$* \dot{\vec{v}}_p' = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{r}_i' \hat{e}_i' \right) = \sum_i \ddot{r}_i' \hat{e}_i' + \sum_i \dot{r}_i' \dot{\hat{e}}_i' = \vec{a}_p' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_p'$$

$$* \dot{\vec{v}}_p^{(e)} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \right) = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt} \left(\sum_i r_i' \hat{e}_i' \right)$$

$$= \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_p' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

Ainsi on peut écrire $\vec{a}_p = \vec{a}_p' + \vec{a}_p^{(e)} + \vec{a}_p^{(c)}$

* $\vec{a}_p' = \sum_i \ddot{r}_i' \hat{e}_i'$ est l'accélération relative, mesurée dans $\mathcal{R}'$

* $\vec{a}_p^{(e)} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}'$ est l'accélération d'entraînement
 ↳ d'un point fixe de $\mathcal{R}'$ qui coïncide avec P à l'instant t
 centripète

* $\vec{a}_p^{(c)} = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{v}_p'$ est l'accélération de Coriolis

Ex : mvt. rect. unif. sur le carrousel ($\vec{\omega} = \text{constant}$)

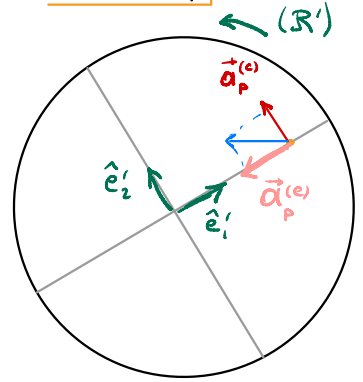
• $\vec{a}'_p = 0$

• $\vec{a}_p^{(e)} = \omega \hat{e}_3 \wedge (\omega \hat{e}_3 \wedge r'_1 \hat{e}'_1) = r'_1 \omega^2 \hat{e}_3 \wedge \hat{e}'_1 = \underline{-r'_1 \omega^2 \hat{e}'_1}$

• $\vec{a}_p^{(c)} = 2 \omega \hat{e}_3 \wedge v'_0 \hat{e}'_1 = \underline{2 \omega v'_0 \hat{e}'_2}$

Comme dans $\mathcal{R}$ $m \vec{a}_p = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$ il doit
exister des forces réelles

↳ frottements statiques entre carrousel
et pieds



II) Dynamique dans $\mathcal{R}'$: forces inertielles

1) 2^{ème} loi dans $\mathcal{R}$: $m(\vec{a}'_p + \vec{a}_p^{(e)} + \vec{a}_p^{(c)}) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$

donc $m \vec{a}'_p = \sum \vec{F}_{\text{ext}} - \underbrace{m \vec{a}_p^{(e)} - m \vec{a}_p^{(c)}}_{\text{forces inertielles}}$

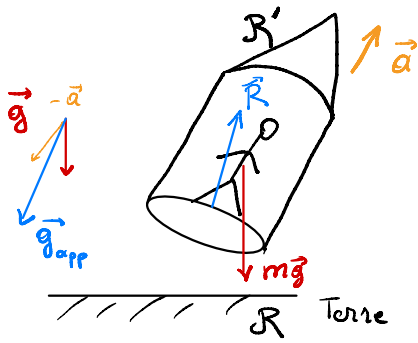
$$\vec{F}^{(e)} = -m \vec{a}^{(e)} = -m \vec{a}_p^{(e)} - m \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - m \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

↓
force centrifuge

$$\vec{F}^{(c)} = -2 m \vec{\omega} \wedge \vec{v}'_p \quad \text{force de Coriolis.}$$

III) Exemples

1) Réf. en translation accélérée → poids apparent



Forces :

- * poids dans R : $\vec{P} = m\vec{g}$
- * réaction du sol : $\vec{R}$ (comprend les frottements statiques)
- * force d'entraînement dans R' :

$$\vec{F}^{(e)} = -m\vec{a}$$

À l'équilibre dans R' : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}^{(e)} = 0$

$$\hookrightarrow \vec{R} = -m\vec{g} + m\vec{a} = -m(\vec{g} - \vec{a}) = -m\vec{g}_{app}$$

où

$$\vec{g}_{app} = \vec{g} - \vec{a}$$