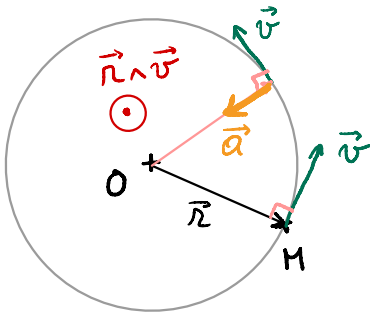


I) Moment cinétique (= angular momentum, vs. linear momentum) = qté de mvt.

Rappel: dans un mvt. rectiligne uniforme, la qté de mvt. $\vec{p} = m\vec{v}$ est conservée

Dans un mvt. circulaire uniforme existe-t-il un vecteur conservé ?



$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \vec{v}) &= \dot{\vec{r}} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{v}} \\ &= \vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0} \\ &\quad \vec{a} \parallel \vec{r}\end{aligned}$$

1) Déf: Soit M un pt. mat. de masse m
O un pt. fixe dans le référentiel

Le moment cinétique de M par rapport à O est

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge (m\dot{\vec{OM}}) = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad \text{où} \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

2) Théorème du moment cinétique

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \dot{\vec{r}} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{p}} = \vec{r} \wedge \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i \\ &\quad \underbrace{\vec{v} \wedge m\vec{v}}_{=\vec{0}} \quad \downarrow \quad \vec{\dot{p}} = \sum_i \vec{F}_i\end{aligned}$$

Déf: Le moment de la force $\vec{F}$ appliquée en M par rapport à O est

$$\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{F} \quad [\text{N.m}]$$

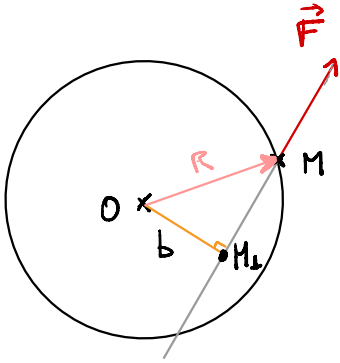
Rappel

Th. du mom. cin.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

3) Calcul de produits vectoriels : "bras de levier"



$$\vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM}_\perp \wedge \vec{F}$$

$$\text{Démono: } \vec{OM} = \vec{OM}_\perp + \vec{M}_\perp \vec{M}$$

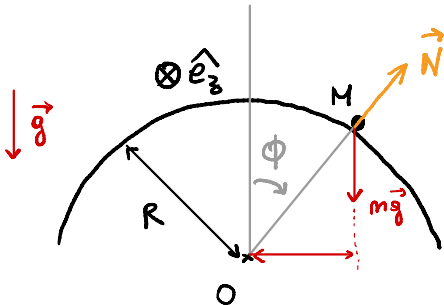
$$\text{or } \vec{M}_\perp \vec{M} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{En particulier } |\vec{OM} \wedge \vec{F}| = |\vec{OM}_\perp| \cdot |\vec{F}|$$

$$= b \cdot F$$

où b est le "bras de levier"

Ex : point glisse sur un dôme

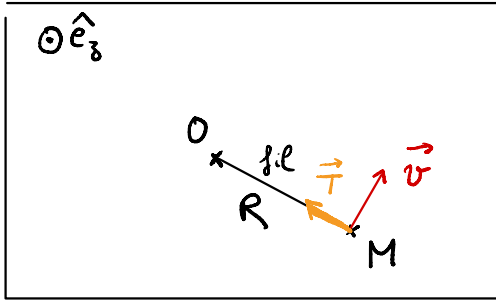


Moments des forces :

$$\vec{OM} \wedge \vec{N} = \vec{0}$$

$$\vec{OM} \wedge m\vec{g} = R(\sin\phi) m g \hat{e}_3$$

4) Exercice : palet attaché à un fil



* Système : pt. mat. M
de masse m

* Référentiel lié à la table

* Bilan des forces

Poids : $\vec{P} \parallel \hat{e}_3$ Réaction table : $\vec{N} \parallel \hat{e}_3$ Tension fil : $\vec{T}$

PFD selon $\hat{e}_3$: $m\ddot{z} = 0 = \vec{P} + \vec{N}$

Th. du mom. cin. par rapport à O : $\dot{\vec{L}}_O = \vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{N} + \vec{T})$
 $= \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$

Donc $\vec{L}_O = \overrightarrow{\text{constant}}$

on $|\vec{L}_O| = |\vec{OM} \wedge m\vec{v}| \rightarrow$ Instant initial : circulaire rayon R_1
 ——— final : ——— R_2

Sur une trajectoire circulaire $\vec{v} \perp \vec{OM}$

↳ Initial : $|\vec{L}_O| = m R_1 v_1$
 Final $|\vec{L}_O| = m R_2 v_2$ } $R_1 v_1 = R_2 v_2$

$$v_2 = v_1 \frac{R_1}{R_2}$$

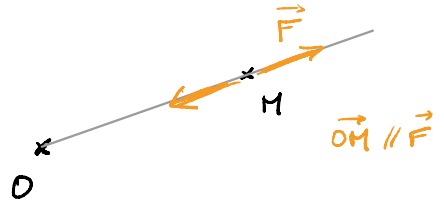
Rmq : vitesse angulaire $\omega \rightarrow v = R\omega$

$$R_2 \omega_2 = R_1 \omega_1 \times \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \times \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2$$

II) Forces centrales

1) Déf : Une force $\vec{F}$ appliquée en $M(t)$ est dite centrale s'il existe un point fixe O (le centre) tel qu'en tout temps

$$\vec{OM}(t) \wedge \vec{F} = \vec{0}$$



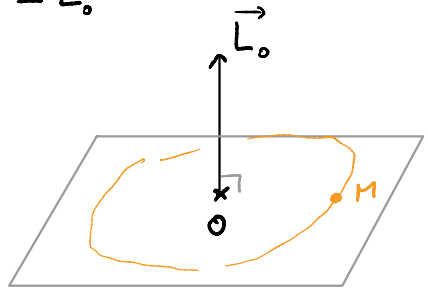
Ex : gravitation / force de Coulomb

Conséquences

a) si M n'est soumis qu'à une force centrale
alors son moment cinétique p/r à O est conservé

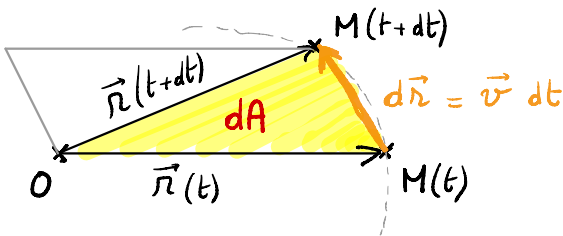
b) Le mvt a lieu dans un plan fixe $\perp \vec{L}_0$.

Démo : Comme $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$
en particulier $\vec{OM} \perp \vec{L}_0$



c) Le mvt. suit la Loi des aires (2^{ème} loi de Kepler)

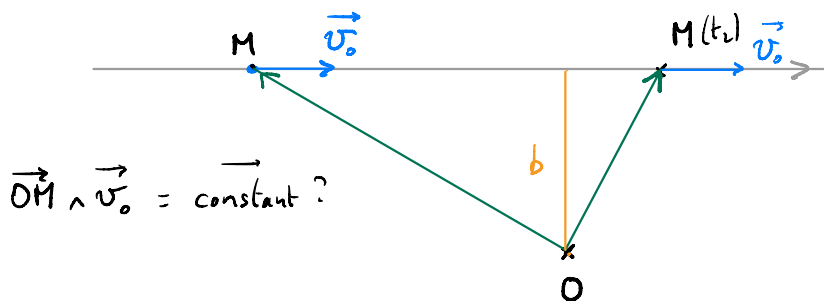
"L'aire balayée par $\vec{OM}$ par unité de temps est constante"



Donc
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{L}_0|$$

$$\begin{aligned} dA &= \text{aire balayée par } \vec{r} \text{ en } dt \\ &= \frac{1}{2} \text{ aire parallélogramme.} \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r} \wedge \vec{v} dt| \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\vec{L}_0|}{m} dt \end{aligned}$$

Commentaire : mom. cin. dans un mvt. rectiligne uniforme



$$\vec{OM} \wedge \vec{v}_0 = \text{constant ?}$$

$$\downarrow \\ \sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$$