

Résumé sem. 5 Quelques soient les forces $\vec{F}_i$ en présence

a) $\frac{dK}{dt} = P_{\text{tot}}$ où $K(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2$ et $P_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}$

b) Entre deux points : $K_2 - K_1 = \sum_i \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_i(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

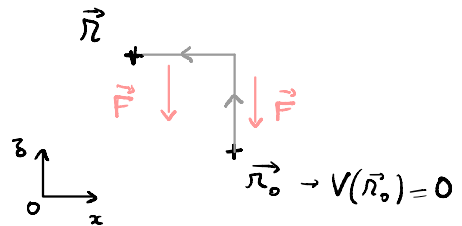


III) Energie potentielle d'une force conservative

1) Def : Une force est conservative si son travail dépend seulement du point initial et du point final (pas de la trajectoire)

Si $\vec{F}$ est conservative, on peut définir son énergie potentielle :

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

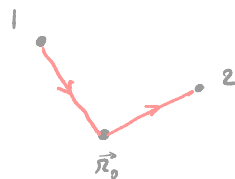


On dit que $\vec{F}(\vec{r})$ dérive du potentiel $V(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} V(\vec{r}) = - \text{grad } V(\vec{r}) = - \frac{dV}{dx} \hat{e}_x - \frac{dV}{dy} \hat{e}_y - \frac{dV}{dz} \hat{e}_z$$

2) Le travail de $\vec{F}$ entre deux points s'exprime comme une "chute d'énergie potentielle" :

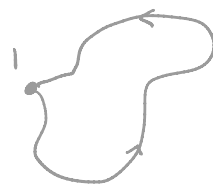
$$W_{1 \rightarrow 2}^{\vec{F}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_1^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{V_1} + \underbrace{\int_{\vec{r}_0}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{-V_2} = \underline{V_1 - V_2}$$



$$W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

initiale - finale $\rightarrow$ "chute"

* En particulier, $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
 $\hookrightarrow$ boucle fermée



$\hookrightarrow$ condition nécessaire pour qu'une force soit conservative

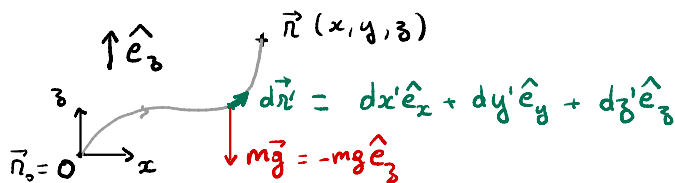
3) Exemples

a) Frottements cinétiques (secs ou fluides) $\rightarrow$ travail tjs < 0

$\hookrightarrow$ jamais nul sur une boucle $\Rightarrow$ pas conservatives

b) Liaisons et frottements statiques $\rightarrow$ travail nul si support fixe ds $\mathbb{R}$.
 (mais pas conservative en général si support mobile)

c) Poids

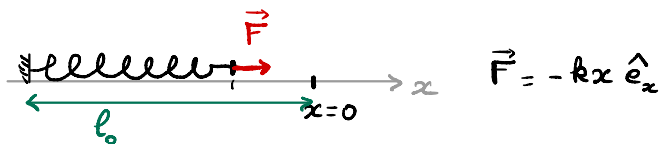


$$V(\vec{r}) = - \int_0^{\vec{r}} -mg \hat{e}_z \cdot d\vec{r}' = + \int_0^{\vec{r}} mg dz' = mg [\vec{z}]_0^{\vec{r}} = \underline{mgz = V(\vec{z})}$$

Vérifions : $-\vec{\nabla}V = -mg\hat{e}_3 = \text{poids} \checkmark$

Attention ! si $\downarrow \hat{e}_3$ alors $V(\vec{r}) = -mgz$ et $\vec{F} = mg\hat{e}_3$

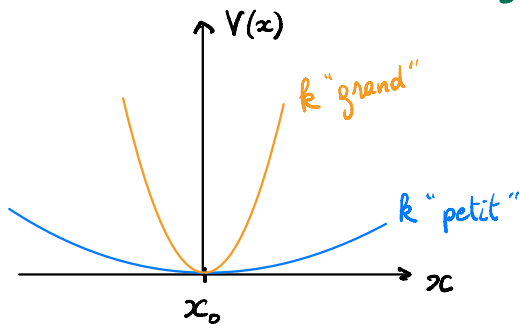
d) Ressort



$$V(x) = - \int_0^x \vec{F}(x') \cdot \hat{e}_x dx' = - \int_0^x -kx' dx' = k \int_0^x x' dx' = k \left[\frac{x'^2}{2} \right]_0^x$$

Donc $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$ potentiel harmonique (parabolique)

Plus généralement $V(x) = \frac{1}{2} k (\underbrace{x-x_0}_{\text{élongation}})^2$ où $x_0 = \text{position à vide}$.



4) Energie mécanique d'un pt. mat.

Déf : $E = K + V$ où V est la somme des énergies potentielles des forces conservatives.

Théorème . En l'absence de forces non-conservatives qui travaillent l'énergie mécanique est conservée ($E = \text{constante}$)

Démo : on a vu que $K_2 - K_1 = W_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$

$$\Rightarrow K_2 + V_2 = K_1 + V_1$$

* L'én. méca. est alors une "intégrale première du mvt"

↳ quantité conservée
qui s'obtient en intégrant une seule fois les eq. du mvt.

Ex : masse + ressort (selon $\hat{e}_x$)

Eq. du mvt : $m\ddot{x} + kx = 0$

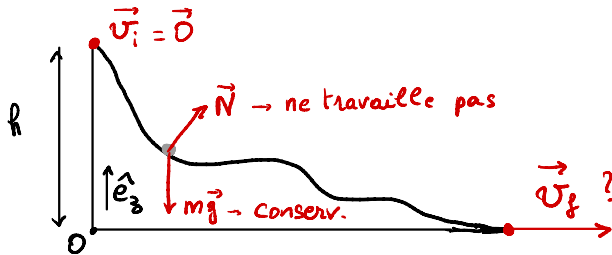
On multiplie par $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$

On reconnaît les dérivées : $\star \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right\} = m \ddot{x} \dot{x}$

$$\star \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} k x^2 \right\} = k \dot{x} x$$

d'où $\frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_K + \underbrace{\frac{1}{2} k x^2}_V \right\} = 0$
Conservée

Ex : tremplin
(sans frottement)



Ici, l'énergie méca. est conservée

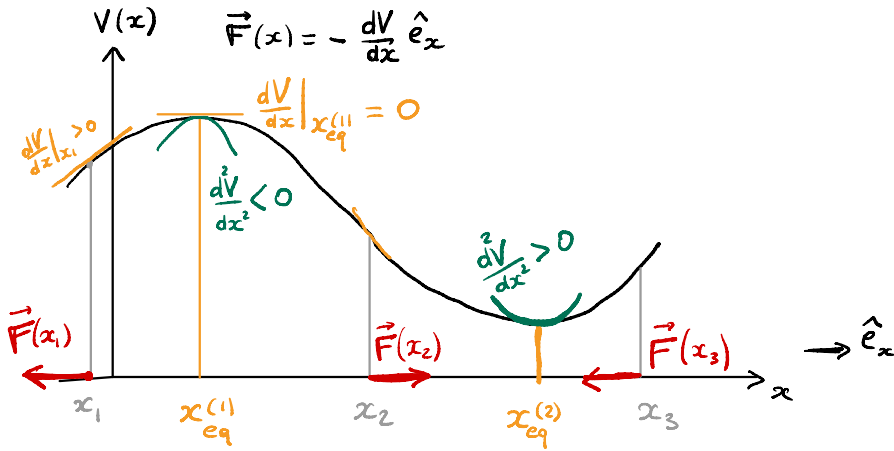
En. pot. de pesanteur : $V(z) = mgz$ } $E = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

Initial : $E = mgh$

Final : $E = \frac{1}{2} m v_f^2$ } $\frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \Rightarrow |\vec{v}_f| = \sqrt{2gh}$

IV) Equilibres, stabilité, petites oscillations

On considère un pt. mat. soumis à une somme des forces conservative $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, se déplaçant selon une dimension "x" (ou $R\Phi$)

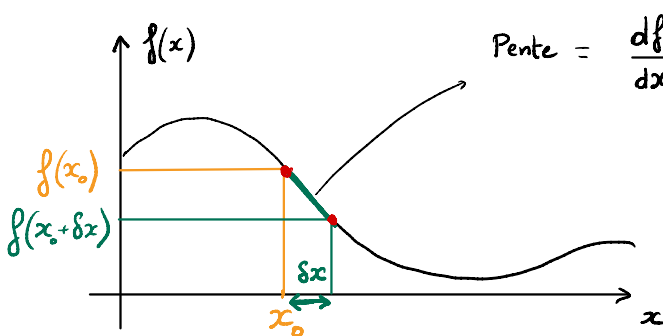


1) Positions d'équilibres : $\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow F(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = 0$

Déf : x_{eq} est un point d'équilibre ssi $\frac{dV}{dx}|_{x_{eq}} = 0$ ou $\frac{dV}{dx}(x_{eq}) = 0$

$\hookrightarrow x_{eq}$ est soit un maximum ou un minimum local de $V(x)$

Rappel : développement limité (1^{er} ordre)



$$\begin{aligned} \text{Pente} &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{x_0 + \delta x - x_0} \\ &= \frac{1}{\delta x} (f(x_0 + \delta x) - f(x_0)) \end{aligned}$$

Donc : $f'(x_0)$

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

2) Stabilité : pour x proche de x_{eq} ($x = x_{eq} + \delta x$),

la force s'écrit : $F(x) = F(x_{eq} + \delta x) = F(x_{eq}) + \delta x \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x_{eq}}$ $F = -\frac{dV}{dx}$

$$= - \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} \cdot \delta x = -k_{eff} \delta x$$

$$F(x) = -k_{eff} \delta x$$

où $k_{eff} = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}}$

a) Si $k_{eff} = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$ force de rappel

Equilibre stable $\Leftrightarrow$ minimum local de $V(x)$

b) Si $k_{eff} \leq 0 \rightarrow$ équilibre instable (force de répulsion)

3) Pulsation propre : autour d'un équilibre stable,

le système effectue des oscillations harmoniques
(pt. mat.)

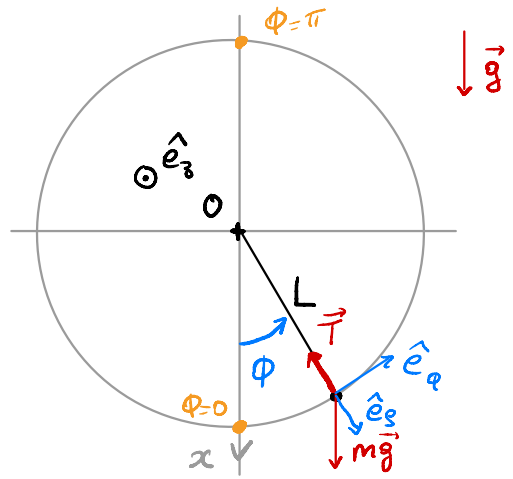
de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$$

4) Ex : pendule rigide plan

Syst: pt. mat. (m) attaché à une
tige rigide sans masse

Trouver les équilibres ?
leur stabilité ?
puls. propre ?



Méthode 1 : éq. du mvt.

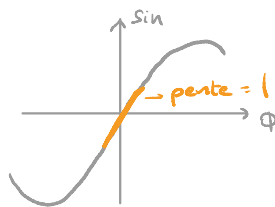
$$\text{Rappel : } \begin{cases} mL\ddot{\Phi} = -mg \sin \Phi & (1) \\ -mL\dot{\Phi}^2 = T_s + mg \cos \Phi & (2) \end{cases}$$

Selon (1), les positions d'équilibre $\ddot{\Phi} = 0$ sont solutions de
 $\sin \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \text{ ou } \Phi = \pi$

* Autour de $\Phi = 0$, $\sin(0 + \delta\Phi) = \sin(0) + \delta\Phi \cos(0) = \delta\Phi$

L'éq. (1) devient : $mL\ddot{\delta\Phi} = -\underbrace{mg}_{>0} \delta\Phi \rightarrow \text{force de rappel}$

$\Phi = 0$ équilibre stable



* Autour de $\Phi = \pi$: $\sin(\pi + \delta\Phi) = \sin(\pi) + \delta\Phi \cos(\pi) = -\delta\Phi$

L'éq. (1) devient : $mL\ddot{\delta\Phi} = +mg \delta\Phi \rightarrow \text{force répulsif}$

Méthode 2 : énergie potentielle

* $\vec{T}$ ne travaille pas

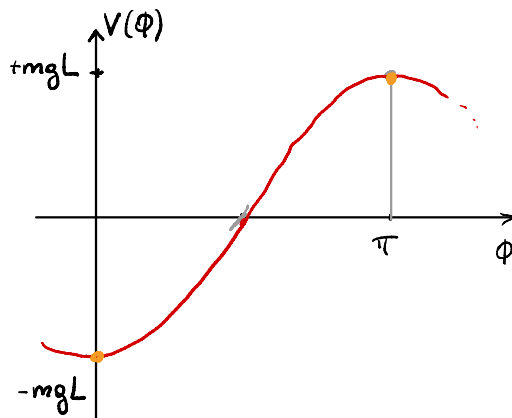
* poids : conservative, $V(x) = -mgx$

donc $V(\Phi) = -mgL \cos \Phi$

a) Equilibres $\frac{dV}{d\Phi} = mgL \sin \Phi$

Résoudre $\frac{dV}{d\Phi} = 0 \Rightarrow \sin \Phi = 0$

↳ 2 solutions $\Phi = 0 \text{ ou } \Phi = \pi$



b) Stabilité : $\frac{d^2V}{d\phi^2} = mgL \cos \phi$

En $\phi = 0$: $\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = mgL > 0$ donc stable

$\phi = \pi$: $\left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pi} = -mgL \leq 0$ donc instable

c) Pulsation propre autour de $\phi = 0$

Pour trouver k_{eff} , il faut dériver V p/s à une longueur $s = L\phi$

$$ds = L d\phi \Rightarrow \frac{1}{ds} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{d\phi} \quad \text{donc : } \frac{d^2V}{ds^2} = \frac{1}{L^2} \frac{d^2V}{d\phi^2} = \frac{mg}{L} \cos \phi$$

en $\phi = 0$: $k_{eff} = \frac{mg}{L}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$\hookrightarrow \left. \frac{d^2V}{ds^2} \right|_{\phi=0}$