
Aborder et résoudre un problème de mécanique newtonienne

Notre expérience d'enseignement de la mécanique classique à l'EPFL nous a montré qu'il est difficile pour certains étudiants de première année d'appliquer une méthode systématique pour la résolution des problèmes en séance d'exercices. Les énoncés leur paraissent hermétiques, sans aucun indice apparent pour le démarrage, renforçant l'idée qu'il faut trouver "l'astuce" qui permette d'arriver à la solution, et que cette astuce est différente pour chaque problème. Ceci peut laisser l'étudiant démuni, qui feuillette alors désespérément les transparents du cours en quête de la formule miracle qui va pouvoir le sauver (une parmi des centaines!), chaque fois une formule différente et totalement imprévisible. Il sait bien que ça ne le mènera pas très loin, et son ultime recours est alors d'implorer le tuteur (ou bien le camarade du groupe qui sait déjà tout) de voler à son secours et de bien vouloir lui distiller au moins la première partie ou même la totalité de la solution. C'est alors le soulagement de voir cette solution finalement écrite sur la feuille blanche : le but est atteint ! Car le but, c'est bien d'obtenir la solution, non ?

L'espace de phase des problèmes de mécanique semble immense, il est vrai, et chaque nouveau problème peut surprendre et faire penser qu'il sera impossible, avant le jour de l'examen, de maîtriser une quelconque technique de résolution. En réalité, tous les problèmes de mécanique se ressemblent, et la seule "astuce" qui soit est l'application des lois de la dynamique. Autrement dit, la formule à utiliser est la deuxième loi de Newton et le théorème du moment cinétique. Le reste n'est que corollaire, ou définition, ou mathématiques. A partir de là, il est bien évidemment possible de développer une approche systématique pour la résolution des problèmes. C'est ce que ce document essaie de présenter : une approche en 8 étapes, qui permette à l'étudiant d'apprendre à aborder un problème, à le résoudre, et à examiner la solution obtenue de façon critique. En effet, il ne suffit pas d'obtenir la solution, il faut encore s'assurer qu'elle ait des chances d'être correcte, car même si le point de départ est solide, les étourderies mathématiques, maladresses algébriques, inadvertances de signe, ou autres pièges à étudiants ont malheureusement vite fait de rendre le résultat inepte.

Ce document est un essai. Il ne peut pas être parfait. Il y aura sûrement des exemples de problèmes pour lesquels la démarche proposée ne sera pas la meilleure. Avec le feedback des étudiants, ce document pourra être amélioré. Pour l'heure il aura déjà atteint son but s'il permet à quelques-uns d'apprendre à naviguer dans les eaux de la mécanique et de pratiquer l'"abordage" des problèmes sans couler à tous les coups. Bon vent !

Table des matières

1	Appréhender l'énoncé	3
2	Définir le (ou les) système(s) ; faire un dessin	3
3	Choisir un référentiel (= observateur)	4
4	Identifier et dessiner les forces extérieures subies par chaque système	4
4.1	Enumération des forces extérieures	5
4.2	Identification du point d'application de chaque force extérieure	5
4.3	Détermination de la direction de chaque force extérieure	5
4.4	Représentation des forces extérieures sur un dessin	6
5	Trouver les lois applicables (lois de la dynamique ou de conservation)	6
5.1	Les lois fondamentales de la dynamique	6
5.2	Les lois de conservation	7
5.3	Le théorème de l'énergie	7
5.4	Choix des lois à utiliser	7
6	Choisir les variables de position (= coordonnées)	8
6.1	Variables déterminant la position des systèmes	8
6.2	Contraintes dues aux forces de liaison	8
7	Ecrire les équations du mouvement ; les résoudre	9
7.1	Choix de repères	9
7.2	Expression des grandeurs physiques apparaissant dans les lois en fonction des variables choisies	9
7.3	Obtention du système d'équations	9
8	Vérifier la solution	10
8.1	Vérifications élémentaires	10
8.2	Vérifications mathématiques	10
8.3	Vérifications dimensionnelles	10
8.4	Cas limites	11
8.5	Valeurs numériques	11

1 Appréhender l'énoncé

Avant de faire quoi que ce soit d'autre (par exemple regarder son camarade résoudre le problème), il est essentiel de lire très attentivement l'énoncé du problème, du début à la fin. Si nécessaire on le relira plusieurs fois, afin de le décortiquer pour

- comprendre la situation décrite, qui doit alors apparaître comme cohérente ;
- visualiser (par la pensée) le mouvement possible ou tous les mouvements possibles dans l'espace, en pensant aux trois dimensions ;
- relever les approximations ou hypothèses simplificatrices, explicitement mentionnées ou indirectement suggérées ;
- si l'énoncé en laisse la liberté, modéliser les systèmes ou la situation (par exemple, considérer qu'une planète est un point matériel, qu'une poulie a une masse négligeable, qu'un haltère est un système de deux point matériels reliés par une tige rigide sans masse, ...)
- identifier les paramètres du problème, c'est-à-dire les quantités constantes apparaissant dans le problème et supposées être connues (par exemple une masse m , un rayon R , une accélération de pesanteur g , un coefficient de frottement μ , une vitesse initiale v_0 , un moment d'inertie I , ...) ;
- identifier les variables mentionnées dans l'énoncé, c'est-à-dire les quantités qui peuvent dépendre du temps (par exemple un angle $\alpha(t)$, une altitude $z(t)$, une force de liaison $F(t)$, ...), même si la dépendance temporelle n'est pas explicitée ;
- établir la liste des quantités ou fonctions connues, ainsi que la liste des quantités ou fonctions qu'il s'agit de déterminer ;
- reformuler le plus concrètement possible les objectifs à atteindre (par exemple, et le plus souvent, exprimer les quantités inconnues en fonction des paramètres du problème, ou les fonctions inconnues en fonction du temps et des paramètres).

Il se peut qu'on ait immédiatement une intuition de la solution ou, plus généralement, qu'une intuition apparaisse en cours de résolution. Ceci est très bien, mais il faut aussi savoir se méfier des intuitions, car elles peuvent n'être que de simples préjugés qui se révèlent incorrects (c'est par exemple faux de penser que la force de réaction d'un sol horizontal sur un objet qui le touche est nécessairement de même norme que le poids de cet objet). Il est donc préférable, dans un premier temps, de laisser l'intuition de côté, et d'appliquer une méthode qui s'appuie toujours sur les lois de la physique, comme celle proposée ci-dessous. Une fois la solution obtenue, on pourra évidemment la confronter à l'intuition ... et peut-être comprendre pourquoi l'intuition s'est trompée, ou bien s'émerveiller devant son excellente intuition physique.

2 Définir le (ou les) système(s) ; faire un dessin

Les lois de la physique s'appliquent toujours à un certain système physique, qu'il s'agit donc de définir. Le système peut être un point matériel ou un système de points matériels (par exemple un ou plusieurs solides). Le système est souvent un objet ou un ensemble d'objets mentionnés dans l'énoncé. Si le système est bien défini, il doit être possible de dire, pour chaque point matériel de l'Univers, s'il fait partie du système ou non.

Il peut être nécessaire ou utile de définir plusieurs systèmes. On pourra ainsi appliquer des lois physiques à chacun d'eux. Si on définit deux systèmes A et B, on peut aussi penser à définir un troisième système C formé de A et B. Parfois, il est alors plus pratique de travailler

avec les systèmes A et C, plutôt que A et B.

La définition d'un ou plusieurs systèmes résulte d'un choix. On fait ce choix, bien évidemment, en fonction des questions à résoudre. Si, au cours de la résolution, le choix s'avère peu commode ou inefficace, il ne faut pas hésiter à recommencer avec un meilleur choix.

On fera un dessin de chaque système défini et on y représentera les données du problème (en particulier les paramètres), en utilisation les mêmes notations que dans l'énoncé. Ce dessin peut évidemment (et doit souvent) représenter aussi des éléments extérieurs au système. Il pourra être complété (voir refait, si nécessaire) lors des étapes suivantes. De façon générale, il est vivement conseillé de faire ce dessin pour une position quelconque du système, c'est-à-dire à un temps t quelconque. Un dessin représentant une position "remarquable" du système à un instant bien particulier peut être utile dans certaines circonstances, mais risque d'induire en erreur s'il est ensuite utilisé de façon générique.

3 Choisir un référentiel (= observateur)

Le mouvement de chaque système défini à l'étape 2 va toujours être décrit par rapport à un certain objet, appelé référentiel. Il faut choisir ce référentiel. Techniquement, un référentiel est un ensemble d'au moins 4 points non-coplanaires immobiles les uns par rapport aux autres : un référentiel est donc un solide indéformable. Des exemples de référentiels sont : la Terre, un avion, une table tournante, un wagonnet sur un grand huit, ...

Pour bien comprendre la notion de référentiel, il faut toujours s'imaginer que l'observateur (c'est-à-dire la personne qui décrit le mouvement du système) fait partie intégrante du référentiel. Une fois que le référentiel est choisi, il faut absolument se mettre dans ce référentiel, de façon à devenir soi-même immobile par rapport à ce référentiel. Par exemple : s'ancrer avec les pieds sur Terre, entrer dans l'avion, sur mettre sur la table tournante, s'asseoir dans le wagonnet du grand huit, ...). L'observateur décrit ensuite le système physique comme il le voit de ce référentiel.

Le choix d'un référentiel est important, car l'application des lois de la dynamique dépend du type de référentiel choisi. On classe les référentiels en deux catégories :

- les référentiels d'inertie, dans lesquels la loi d'inertie (1ère loi de Newton) est valable ;
- les référentiels "accélérés", dans lesquels la loi d'inertie n'est pas valable.

Les référentiels d'inertie sont tous en mouvements rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres. C'est pour cela que les autres référentiels sont dit accélérés.

Le référentiel choisi est souvent un référentiel suffisamment peu accéléré pour qu'on puisse faire l'approximation qu'il s'agit d'un référentiel d'inertie (par exemple la Terre). Cependant la validité d'une telle approximation n'est pas universelle et dépend de ce qui est demandé dans l'énoncé.

4 Identifier et dessiner les forces extérieures subies par chaque système

Pour cette étape on se limite à l'identification des forces exercées sur le système par des corps extérieurs au système, appelées forces "extérieures". En effet, seules les forces extérieures (ou leurs moments) interviennent dans le théorème du centre de masse (ou du moment cinétique). Toutefois les forces "intérieures" exercées entre les points matériels d'un système ne

peuvent pas être ignorées dans toutes les situations, en particulier lorsqu'on discute d'énergie (voir les étapes 5.2 et 5.3).

Pour chaque système défini à l'étape 2, on procédera aux 4 sous-étapes décrites ci-après.

4.1 Enumération des forces extérieures

On dressera la liste des forces extérieures s'exerçant sur le système, c'est-à-dire s'exerçant sur un point matériel appartenant au système ou définies comme la résultants de forces s'exerçant sur des points matériels appartenant au système. Il faut également prendre en compte les forces d'inertie, qui sont considérées comme des forces extérieures appliquées sur le système par le reste de l'Univers. Si on travaille avec un référentiel d'inertie, les forces d'inertie sont nulles par définition.

L'énoncé ne mentionne pas forcément toutes les forces. L'existence des forces de liaison et des forces d'inertie est très souvent implicite. L'existence d'autres forces peut aussi être implicite (par exemple les poids, les forces de frottement statiques, ...), en fonction du contexte. D'autres forces non mentionnées peuvent être supposées négligeables (par exemple les forces de frottement de l'air), si le problème ne perd pas sa cohérence avec cette approximation.

4.2 Identification du point d'application de chaque force extérieure

Ceci est très important dans le cas d'un système formé de plusieurs points matériels (par exemple un solide), car il faudra très probablement travailler avec des moments de force. Dans le cas d'un système formé d'un unique point matériel, le point d'application des forces est le point matériel lui-même.

On notera que le point d'application d'une force peut

- ne pas être un point matériel du système (par exemple le point d'application du poids d'une bouée) ;
- être une inconnue du problème (par exemple le point d'application de la force qu'un plan incliné exerce sur une brique posée sur ce plan et immobilisée grâce à une force de frottement statique).

Les forces d'inertie s'appliquent toujours au centre de masse du système.

4.3 Détermination de la direction de chaque force extérieure

Quelques rappels :

- Une force de liaison, c'est-à-dire une force qui résulte de l'imposition d'une certaine contrainte géométrique sur le mouvement du système, est toujours perpendiculaire à n'importe quel déplacement du système qui respecte la contrainte.
- Une force de frottement cinétique est toujours de direction opposée à la vitesse de son point d'application par rapport au corps qui exerce le frottement.
- Une force de frottement statique est toujours opposée à la direction dans laquelle son point d'application bougerait sans elle par rapport au corps qui exerce le frottement.
- Une force exercée par un fil souple à son point d'attache au système est toujours dans la direction de l'autre point d'attache, le long du fil, à condition que le fil soit tendu (sinon la force est nulle).
- Une force exercée par une tige rigide à son point d'attache au système peut avoir une direction quelconque.

- Une force gravifique est toujours dans la direction du corps extérieur au système qui exerce cette force.
- Le support de la force d'un ressort élastique est donné par la droite qui lie les deux extrémités du ressort ; la direction de cette force de rappel est opposée à l'allongement du ressort (elle a donc pour intention de ramener le ressort à sa longueur à vide, où la force est nulle).

4.4 Représentation des forces extérieures sur un dessin

Il est bien évidemment possible de compléter le dessin commencé à l'étape 2, mais il est parfois préférable de refaire un dessin. Pour le cas d'un ensemble de forces non-coplanaires, la visualisation en trois dimensions peut présenter des difficultés. Il peut alors être utile de faire également des dessins en plusieurs projections sur des plans bien choisis, généralement des plans perpendiculaires à certaines forces ou contenant certaines forces.

Une force perpendiculaire au plan du dessin se représente par le symbole

⊙ si la force sort du dessin (c'est-à-dire pointe en direction du lecteur), ou

⊗ si la force entre dans le dessin (c'est-à-dire pointe dans la direction opposée au lecteur).

On peut facilement mémoriser cette convention en considérant un vecteur comme une fléchette avec sa pointe vue par l'avant (⊙) ou son empennage vu par l'arrière (⊗).

Un dessin correct doit contenir toutes les forces extérieures appliquées à un seul système, avec leurs directions et leurs points d'application. Dans la mesure du possible les normes relatives des forces doivent être telles que la résultante de toutes les forces soit réaliste (par exemple, résultante nulle pour un système à l'équilibre, ou résultante centripète pour un mouvement circulaire uniforme, ...). Il est recommandé de définir une notation pour les forces qui ne sont pas déjà explicitement baptisées dans l'énoncé et d'utiliser ces notations sur le dessin.

Il se peut qu'une force soit une inconnue du problème, en particulier sa direction ou certaines de ces composantes peuvent être inconnues. Dans ce cas on représente quand même la force sur le dessin en choisissant arbitrairement les composantes inconnues. Quand on projettera ces forces (voir étape 7, on prendra garde de considérer que ces composantes (y compris leurs signes) sont des inconnues.

5 Trouver les lois applicables (lois de la dynamique ou de conservation)

5.1 Les lois fondamentales de la dynamique

Un système mécanique obéit toujours aux lois fondamentales de la dynamique, c'est-à-dire au théorème du centre de masse et au théorème du moment cinétique (à condition d'inclure les forces d'inertie quand elles existent). Lorsque le système est formé d'un unique point matériel, le théorème du centre de masse est simplement la deuxième loi de Newton, et le théorème du moment cinétique, bien que valable, n'apporte rien de plus que la deuxième loi de Newton (car toutes les forces ont le même point d'application).

Comme rappelé à l'étape 7, ces lois sont vectorielles ; elles donnent, après projection sur les trois axes d'un repère, 6 équations différentielles dans le cas d'un système de points matériels (ou seulement 3 équations différentielles dans le cas d'un point matériel). Ces équations peuvent

être résolues (en tout cas en théorie) pour déterminer les mouvements possibles du système ainsi que les forces de liaison inconnues. Cette résolution implique l'intégration d'équations différentielles de deuxième ordre (au moins).

5.2 Les lois de conservation

Dans certains cas, il est possible d'identifier des intégrales premières du mouvement, c'est-à-dire des formes déjà intégrées (une fois) des équations du mouvement. Ces intégrales premières prennent la forme $Q(t) = Q_0$, où Q_0 est une constante d'intégration déterminée par les conditions initiales, et $Q(t)$ une quantité conservée. Les intégrales premières expriment donc des lois de conservation. Si des lois de conservation existent pour un système donné, il est important de le savoir, car la résolution du problème peut souvent être accélérée par l'application de ces lois.

Pour chaque système, on déterminera lesquelles des lois de conservation suivantes sont applicables.

- Si la résultante des forces extérieures n'a pas de composante selon une certaine direction $\hat{u}$, la composante u de la quantité de mouvement totale est conservée.
- Si la résultante des moments des forces extérieures par rapport à un certain point O n'a pas de composante selon une certaine direction $\hat{u}$, la composante u du moment cinétique total par rapport à O est conservée.
- Si chacune des forces extérieures et intérieures est conservative (ou bien ne travaille pas, ou bien compense le travail d'une autre force), l'énergie mécanique totale est conservée ; son expression doit contenir l'énergie potentielle dont dérive chaque force conservative.

En particulier :

- Si le système ne subit aucune force extérieure (système isolé), les trois composantes de la quantité de mouvement totale et les trois composantes du moment cinétique total, par rapport à n'importe quel point du référentiel, sont conservées.
- Si le système ne subit que des forces extérieures centrales de même centre O , les trois composantes du moment cinétique total par rapport à O sont conservées.

5.3 Le théorème de l'énergie

Même si l'énergie mécanique n'est pas conservée, on peut penser à utiliser le théorème de l'énergie, ou bien le théorème de l'énergie cinétique. Ces théorèmes sont toujours applicables, mais nécessitent le calcul de travaux de forces extérieures et intérieures. Le reste de ce document n'y fait plus explicitement référence, mais il est clair qu'ils peuvent être utilisés au même titre que la loi de conservation de l'énergie (qui est un cas particulier du théorème de l'énergie).

5.4 Choix des lois à utiliser

Si aucune loi de conservation n'est applicable, on utilisera les lois de la dynamique.

Si des lois de conservation sont applicables, il est en principe utile d'en faire usage. Mais ces lois de conservation ne fournissent pas toujours toutes les équations nécessaires à la résolution du problème. On peut bien sûr choisir d'ignorer les lois de conservation et utiliser uniquement les lois de la dynamique.

De façon générale, les lois de conservation sont

- utiles lorsque l'énoncé demande de déterminer une position, une vitesse, une vitesse angulaire, une quantité de mouvement, un moment cinétique ;
- inutiles lorsque l'énoncé demande de déterminer un temps, une pulsation, ou bien une force de liaison inconnue.

Dans ce dernier cas, il faut utiliser les lois de la dynamique.

Le théorème du moment cinétique est valable par rapport à n'importe quel point de référence pour le calcul des moments de force et du moment cinétique total. Si on choisit de résoudre le problème en utilisant ce théorème, il faut alors choisir un point de référence (En effet, appliquer le théorème du moment cinétique plusieurs fois en changeant de point de référence n'apporte rien de plus.) Ce choix donne une possibilité intéressante : celle d'annuler le moment de certaines forces, ce qui est particulièrement utile dans le cas de forces inconnues. Il est fortement recommandé de choisir un point de vitesse nulle ou bien le centre de masse du système (sinon, le théorème du moment cinétique prend une forme plus compliquée que $\sum_i \vec{M}_i = d\vec{L}/dt$).

6 Choisir les variables de position (= coordonnées)

6.1 Variables déterminant la position des systèmes

Un ensemble de variables doit être choisi de telle sorte que la connaissance des valeurs de ces variables à un certain temps t permette de trouver sans ambiguïté la position de chacun des points matériels de chacun des systèmes. Pour un solide, ces variables doivent définir à la fois la position du centre de masse et l'orientation du solide autour de son centre de masse. Ces variables sont aussi appelées "coordonnées". Il peut s'agir de coordonnées usuelles, telles que coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, ou de coordonnées curvilignes absolument quelconques.

Un bon choix de variables tient souvent compte des contraintes auxquelles sont soumis les systèmes, en simplifiant l'expression de ces contraintes (voir point suivant). Par exemple, si un point matériel est contraint à rester

- sur un cylindre de rayon R , on utilisera les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) avec $\rho(t) = R$,
- sur une sphère de rayon R , on utilisera les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec $r(t) = R$,
- sur un cône de révolution de demi-angle d'ouverture α , on utilisera les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec $\theta(t) = \alpha$,
- sur un plan, on utilisera les coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (ρ, ϕ, z) , où l'axe z est perpendiculaire au plan, avec $z(t) = z_0$,
- sur un cercle de rayon R , on utilisera les coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) , où l'axe z est perpendiculaire au plan du cercle, avec $z(t) = z_0$ et $\rho(t) = R$, ou bien les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec $\theta(t) = \arctan(R/z_0)$ et $r(t) = \sqrt{R^2 + z_0^2}$,
- sur le parcours d'un grand huit, on utilisera la coordonnée curviligne s définie comme la distance parcourue depuis le point de départ.

6.2 Contraintes dues aux forces de liaison

Les forces de liaison donnent lieu à des conditions sur les variables de position et/ou leur dérivées par rapport au temps. Ces conditions permettent, le cas échéant, de supprimer des

variables inutiles (cas d'une variable constante, ou bien d'une variable qui dépend d'une autre). Par exemple, les positions de deux corps reliés par un fil tendu, passant éventuellement par des poulies, ne sont pas indépendantes. Un autre exemple plus compliqué est une roue verticale roulant sur un plan horizontal, dont les coordonnées de position et d'orientation doivent satisfaire des conditions imposées par le non-glissement de la roue. Il peut être avantageux (parfois même inévitable) de garder des variables qui ne sont pas indépendantes, mais il faut alors tenir compte de leurs relations lors de la résolution du problème. Lorsqu'on a un jeu de variables (non constantes) toutes indépendantes les unes des autres, le nombre de ces variables est égal au nombre de degrés de liberté de l'ensemble des systèmes définis.

7 Ecrire les équations du mouvement ; les résoudre

7.1 Choix de repères

On va partir des lois choisies à l'étape 5.4. Si parmi elles il y a des lois vectorielles, il va falloir faire des projections sur les trois axes d'un repère. Ce repère doit être choisi. On peut a priori choisir des repères différents pour les projections de chaque loi vectorielle appliquée à chaque système. On donnera la préférence à un repère associé aux coordonnées utilisées (variables de position), mais ceci n'est pas une obligation.

Dans le cas d'un solide, il est beaucoup plus simple de travailler avec un repère d'inertie, c'est-à-dire un repère dont les axes sont des axes principaux d'inertie du solide (attention : ne pas confondre repère d'inertie avec référentiel d'inertie).

Dans tous les cas, il est fortement recommandé de travailler avec des repères orthonormés droits et de les représenter sur les dessins.

7.2 Expression des grandeurs physiques apparaissant dans les lois en fonction des variables choisies

On exprimera les grandeurs apparaissant dans les lois de la dynamique ou les lois de conservation en fonction des variables choisies ainsi que de leurs dérivées par rapport au temps. Ces grandeurs physiques sont des forces, des moments de force, des quantités de mouvement, des moments cinétiques, des énergies cinétiques, et des énergies potentielles. Les quantités cinématiques telles que vitesses et accélérations (linéaires ou angulaires) dépendent évidemment aussi des variables et de leurs dérivées et servent à calculer les grandeurs physiques. Pour les grandeurs vectorielles, on prendra soin d'exprimer chacune des trois composantes sur les axes du repère choisi.

Pour chaque loi de conservation, on déterminera aussi la valeur initiale de la quantité conservée à l'aide des conditions initiales sur les variables de position et leurs dérivées temporelles.

7.3 Obtention du système d'équations

On écrira toutes les équations du mouvement, par projection des lois fondamentales de la dynamique ou applications des lois de conservation sur tous les systèmes définis. Si toutes les quantités physiques ont été exprimées en fonction des variables de position et de leurs dérivées par rapport au temps, on doit obtenir un ensemble d'équation différentielles où les fonctions

inconnues du temps sont les variables de position et des forces de liaison. On vérifiera qu'il y a suffisamment d'équations pour les inconnues à déterminer.

La résolution des équations du mouvement n'est pas toujours demandée. Il est très utile de savoir reconnaître les équations différentielles du mouvement uniformément accéléré et du mouvement oscillatoire harmonique, et tout aussi utile de connaître par coeur leurs solutions.

8 Vérifier la solution

Une fois le problème résolu, il est utile de procéder à un certain nombre de vérifications sur la solution obtenue. Cette étape est très importante, car elle permet souvent de détecter les erreurs (lorsqu'il y en a). La plupart des vérifications ne peuvent pas être faites si le résultat est numérique. Il est donc essentiel de résoudre le problème jusqu'au bout de façon littérale, et de ne passer aux applications numériques (lorsqu'elles sont demandées) qu'après avoir vérifié la solution littérale.

8.1 Vérifications élémentaires

- La solution répond-elle précisément aux questions posées dans l'énoncé ?
- La solution est-elle exprimée de façon littérale, uniquement en fonction des quantités données dans l'énoncé ? Si non, il se peut que la résolution ne soit pas terminée (par exemple substitutions manquantes).

8.2 Vérifications mathématiques

Si la solution contient des fonctions définies seulement sur une partie de l'ensemble des nombres réels, il convient de porter une attention particulière à leurs arguments :

- L'argument d'une racine carrée est-il positif (ou nul) ?
- L'argument d'un logarithme est-il positif ?
- L'argument de la fonction arcsin est-il compris entre -1 et $+1$?
- Le dénominateur d'une fraction est-il non nul ?

Si ce n'est pas le cas, il se peut que la solution soit correcte mais n'existe que pour certaines valeurs des paramètres du problème, ou bien que la solution soit incorrecte. Par exemple, des expressions du type $\sqrt{a^2 \cos(3\pi)}$ ou $\arccos(\ln(1/2 - a^2) - 1)$ ne font pas de sens.

Si la solution n'existe que pour certaines valeurs des paramètres, il est très intéressant d'expliciter ces valeurs et de discuter la solution en fonction des paramètres. Ceci peut-être fait même si l'énoncé ne le demande pas. On gagne souvent une meilleure compréhension physique du problème après avoir fait une telle discussion.

8.3 Vérifications dimensionnelles

Il est important de vérifier que toute expression apparaissant dans la solution soit cohérente du point de vue des dimensions (c'est-à-dire des unités). En réalité, cette cohérence doit être maintenue au cours de toute la résolution, et les tests proposés ci-dessous peuvent être appliqués à tout résultat intermédiaire. Si la solution finale n'est pas cohérente du point de vue des dimensions, on peut vérifier chaque étape intermédiaire et trouver à quel moment l'erreur est survenue. Les règles de cohérence dimensionnelle sont les suivantes :

- deux expressions égales, additionnées ou soustraites doivent avoir la même dimension (c'est-à-dire les mêmes unités) ;
- une expression apparaissant comme un exposant doit être sans dimension (sans unité) ;
- une expression utilisée comme argument d'une fonction mathématique (par exemple, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\exp$, $\log$, ...) doit être sans dimension (sans unité).

Note : le “radian” n'est pas une unité comme les autres, dans le sens où il n'est pas une unité proprement dite ; en effet, les angles (exprimés en radians) sont sans dimension.

Un excellent réflexe est de systématiquement procéder à une simplification de la solution du point de vue dimensionnel, c'est-à-dire une réécriture de la solution en fonction de sous-expressions sans dimension. Ceci rend la dimensionnalité de l'expression beaucoup plus explicite, ce qui simplifie les vérifications ainsi que la discussion de la solution. Par exemple, une expression du type $\sqrt{R_1^2 - v_0^2 t_0^2} / \sqrt{R_1^4 + R_2^4}$, où R_1 et R_2 sont des longueurs, v_0 une vitesse et t_0 un temps, est beaucoup plus lisible (du point de vue des dimensions) si on la réécrit comme $(1/R_1) \sqrt{1 - (v_0 t_0 / R_1)^2} / \sqrt{1 + (R_2 / R_1)^4}$.

8.4 Cas limites

Il arrive souvent qu'on ait une intuition de la solution (ou que celle-ci devienne tout à fait évidente) lorsque le problème est simplifié en considérant des “cas limites” correspondant à des valeurs particulières de certains paramètres. En pratique

- on peut essayer de faire tendre chaque paramètre vers zéro ou vers l'infini, et vérifier que, dans cette limite, la solution se réduise bien à ce qu'on attend (par exemple, on peut faire tendre la constante élastique k d'un ressort vers zéro pour “enlever” ce ressort ; on peut aussi faire tendre g vers zéro pour éliminer la pesanteur, un coefficient de frottement vers zéro pour éliminer le frottement, ou un rayon de courbure vers l'infini pour obtenir une surface plane, etc.) ;
- si deux paramètres ont la même dimension, on peut considérer le cas limite où ces deux paramètres sont égaux (par exemple poser que deux masses m_1 et m_2 sont égales, etc.) ;
- l'expression mathématique de la solution peut également suggérer des cas limites à vérifier, par exemple celui où un terme additif s'annule, celui où l'argument d'une racine s'annule, etc.

8.5 Valeurs numériques

C'est seulement lorsque la solution algébrique a été validée, qu'il est opportun d'effectuer les applications numériques demandées.

On donnera les résultats numériques avec un nombre de chiffres significatifs raisonnable. Suivant les cas, un ordre de grandeur suffira. Dans cette perspective, on pourra arrondir des données, par exemple utiliser $g = 10 \text{ ms}^{-2}$ au lieu de $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$.

Dans la mesure du possible, on vérifiera l'ordre de grandeur de la solution en utilisant son sens commun et des comparaisons en termes de poids, de longueur, et de vitesse des objets courants. Un pois chiche de 20 kg ou une voiture roulant à 1000 km/h sont des indices qu'il y a probablement une erreur quelque part.