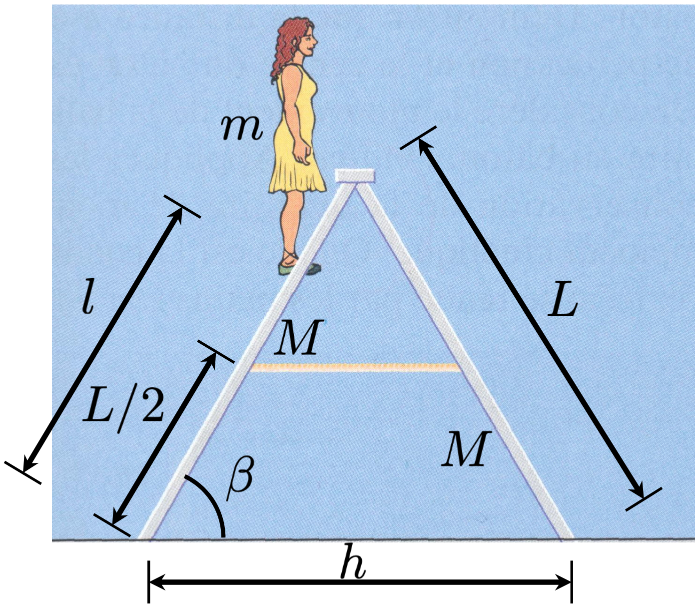
*17 décembre 2024* *J.-P. Hogge*

# Série 14 : Moments d'inertie, statique, dynamique d'un solide

## Exercice 1: Statique : Echelle double (examen janvier 2020)

Une personne de masse $m$ donnée se trouve sur une échelle double décrite à la figure ci-dessous, formée de deux parties de longueur $L$ et de masse $M$ fixées à une charnière à leur sommet, et maintenue en équilibre par une corde de masse nulle située à mi-hauteur. La masse et la géométrie de l'échelle sont connues ($M$, $L$, $h$ et donc $\beta$ ), de même que la position de la personne ($l$). On suppose qu'il n'y a pas de frottements entre le sol et l'échelle et on assimilera les charnières de ce problème à des connexions de masses nulles.

**Vos schémas doivent être clairs : la direction et le sens des forces doivent être représentatifs.**




(a) Déterminez la valeur des forces exercées par le sol sur l'échelle en fonction des paramètres du problème.

(b) Calculez la tension dans la corde.

(c) Identifiez et représentez sur un schéma les forces exercées sur le montant gauche de l'échelle. Sur un second schéma, faites de même avec les forces exercées **sur le montant droit**.

(d) Calculez la force exercée par le montant gauche sur le montant droit et vice-versa.

(e) Imaginez maintenant que la corde est remplacée par une tige métallique de masse $m_t$ non-nulle, fixée aux montants par des charnières de masses nulles. Représentez schématiquement les forces exercées **sur la tige** et justifiez votre réponse.

## Exercice 2: Cylindre pesant et ressort sur un plan incliné

Un cylindre de rayon $R$, et de masse $M$ roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle $\alpha$. L'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à cet axe est $I$. L'axe est retenu par un dispositif dont l'effet est équivalent à un ressort de constante élastique $k$ et de longueur au repos $d$.

(a) Combien de degrés de liberté le système a-t-il ?

(b) Montrez que la condition de roulement sans glissement est

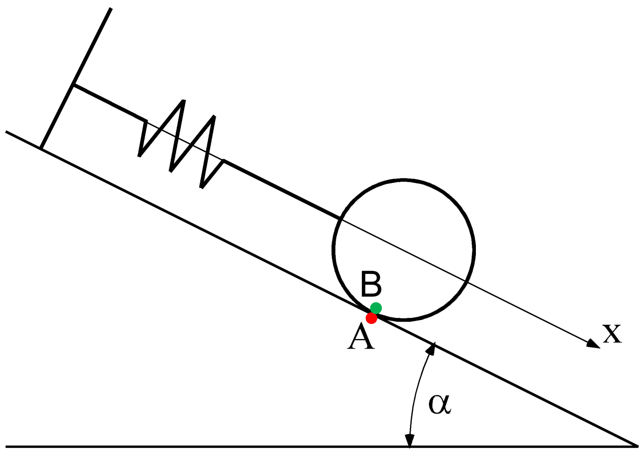
$$x = -R\varphi \ ,$$

où $\varphi$ désigne l'angle de la rotation propre du cylindre. On exprimera la vitesse du point $B$ *du cylindre* qui est en contact avec le plan incliné.

(c) Etablir le bilan des forces en présence.

(d) Ecrire le théorème du centre de masse ($M\ddot{\mathbf{x}}_G = \sum \mathbf{F}^{\text{ext}}$ ) en composantes.

(e) Appliquer le théorème du moment cinétique avec comme référence pour le calcul du moment cinétique et celui des moments de force le point de contact $A$ (attention, ce n'est plus un point du cylindre, c'est maintenant un pojnt qui appartient au plan incliné) entre le cylindre et le plan incliné. En déduire une équation du mouvement pour l'angle $\varphi$.




## Exercice 3: Masse, poulie et ressort

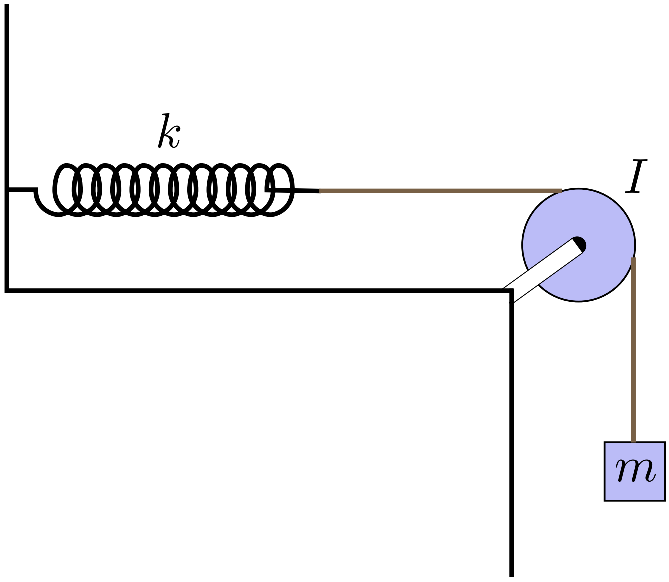
Un bloc de masse $m = 4\,\mathrm{kg}$ est fixé à un ressort ($k = 32\,\mathrm{N/m}$) au moyen d'une corde qui passe, sans glisser, sur une poulie de masse $M = 8\,\mathrm{kg}$ (voir figure). Le système est initialement au repos, l'allongement du ressort étant nul. On ne donne pas le rayon $R$ de la poulie.

(a) Représentez les forces externes qui agissent sur le système formé par la poulie, le ressort et la masse. Indication : Dessinez les forces au crayon gris au cas où vous devriez les effacer.

(b) En considérant le système formé par la poulie seule, représenter les forces externes. Justifiez que la tension dans la corde est différente des deux côtés de la poulie.

(c) Trouver le module de la vitesse du bloc lorsque celui-ci est tombé de 1m. Indication : Ecrivez l'énergie mécanique du système et justifiez qu'elle est conservée.

(d) Ecrivez l'équation du mouvement pour la position de la masse $m$ et donnez sa solution en tenant compte des conditions initiales quelconques. Indication : Dérivez l'énergie mécanique par rapport au temps.




### Exercice 4: Calculs de moments d'inertie

Calculer les moments d'inertie des systèmes suivants :

(a) Un tube de rayon R, de longueur L, de masse M et d'épaisseur $e$ petite devant R ($e \ll R$), par rapport à son axe.

(b) Un cylindre fin de rayon R, de longueur L et de masse M, par rapport à un axe parallèle à sa base et passant par le centre de celle-ci.

(c) Une sphère pleine, de rayon R et de masse M, par rapport à un axe passant par son centre. (indication : tirer parti de la symétrie du problème, en calculant $I_x + I_y + I_z = 3I_x$, où $I_x$, $I_y$ et $I_z$ sont les moments d'inertie par rapport aux axes $x$, $y$ et $z$).

### Exercice 5: Cavité sous terre (facultatif)

Par gravimétrie, on peut déceler l'existence de cavités souterraines.

a) À la surface de la Terre, exprimer le champ de gravitation $g_0$ de la Terre sans cavité et le champ de gravitation $g_1$ au-dessus d'une cavité sphérique de rayon $R_C$ dont le centre est à la profondeur $d \geq R_C$. On notera $\mu$ la masse volumique de la Terre.

b) Supposons qu'on puisse mesurer le champ de gravitation avec une précision $\delta = (g_0 - g_1)/g_0 = 10^{-6}$ et qu'on veuille détecter une cavité juste au-dessous du sol ($R_C = d$). Quelle est la plus petite cavité que l'on puisse détecter ? (Rayon de la Terre $R_T = 6380$ km)

*Indication* : le champ est une grandeur additive (principe de superposition), par conséquent, calculer le champ généré par un objet creux revient à faire le différence entre la champ émis par l'objet plein et le champ émis par la cavité considérée comme de la matière ce qu'on pourrait schématiser comme suit :