

Série 6 Oscillateur harmonique simple et amorti, ressorts

Exercice 1:

Cet exercice traite des équations différentielles du second ordre.

- (a) Soit l'équation différentielle homogène (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de terme de source) du second ordre à coefficient constants (A, B, C)

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0,$$

et soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions possibles.

Montrer qu'une combinaison linéaire de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est aussi solution de l'équation différentielle.

- (b) Soit l'équation différentielle non-homogène

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = f(t),$$

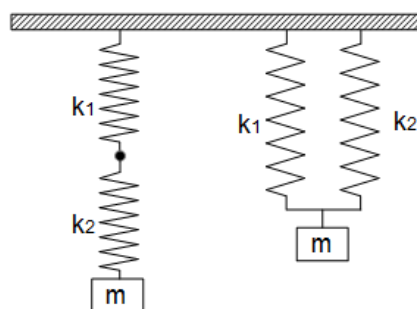
où $f(t)$ est le terme de source de la non homogénéité. Soient $x_G(t)$ et $x_P(t)$ deux solutions. Montrer que la fonction $x_H = x_G - x_P$ satisfait l'équation homogène, soit $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$.

Exercice 2: Raideur de ressort en parallèle ou en série

On considère une masse suspendue par deux ressorts de raideurs différentes (k_1 et k_2)

- (a) en série.
(b) en parallèle.

Dans chaque situation on peut remplacer la combinaison des ressorts par un seul ressort avec une certaine 'raideur équivalente' k_{eq} qui donnera le même déplacement pour la masse quand elle est en équilibre. Trouvez cette raideur équivalente en fonction de k_1 et k_2 dans les deux situations.



Exercice 3: Mouvement cyclotronique

Soit un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et un électron (charge $e < 0$) de vitesse $\vec{v}_0 = v_{0,x}\vec{e}_x + v_{0,y}\vec{e}_y + v_{0,z}\vec{e}_z$ à l'instant $t = 0$. L'électron subit la force de Lorentz $\vec{F}_L = e(\vec{v} \times \vec{B})$.

- (a) Représentez le champ magnétique et la force de Lorentz dans un diagramme.
(b) Montrez (à l'aide des simples arguments géométriques) que la trajectoire de l'électron est une hélice autour d'un axe selon z .

- (c) Calculez le 'rayon de Larmor' r_L (le rayon d'une orbite de l'hélice), ainsi que la 'fréquence cyclotronique' f_c (l'inverse du temps qu'il faut à l'électron pour compléter une telle orbite) en fonction de la vitesse perpendiculaire au champ $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Exercice 4: Oscillateur harmonique amorti : Le flotteur

Un pêcheur pêche à l'aide d'une canne à pêche en mangeant une... pomme. À l'extrémité de la canne à pêche se trouve un flotteur. Ce dernier est de forme cylindrique de rayon r , de hauteur h et de masse homogène. Le flotteur se tient verticalement dans l'eau et il se déplace de haut en bas. On tient compte de la viscosité partielle de l'eau sous forme de frottement $\vec{F}_f = -k\eta\vec{v}$. La masse volumique du cylindre vaut les deux tiers de celle de l'eau : $\rho_c = \frac{2}{3}\rho_{eau}$.

- (a) Calculez la hauteur du cylindre qui se trouve immergée à l'équilibre.
- (b) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre. Exprimez sa pulsation non amortie ω_0 et son coefficient d'amortissement λ en fonction des données du problème.
- (c) On appuie sur le flotteur et il se met à osciller verticalement jusqu'à retrouver sa position d'équilibre. Que pouvez-vous dire sur le type d'amortissement ? Dessinez l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps.