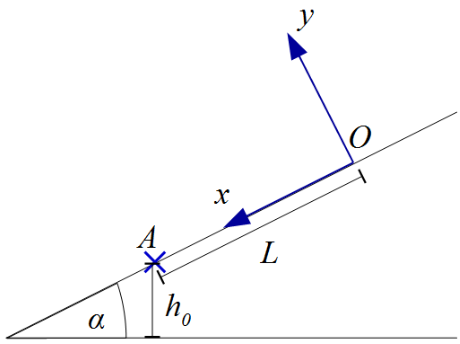
Série 5 Newton, frottements visqueux, et oscillalteur harmonique

Exercice 1:

On se propose d'étudier le mouvement de translation d'une masse m sur une pente inclinée d'angle α par rapport à l'horizontale. La position initiale de son centre d'inertie est repérée par $x = O$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.



(a) **Absence de tout frottement**

On considère la masse comme un bloc de glace ou un wagon sur des voies. Elle est lâchée de O à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Donnez l'expression de sa vitesse v, puis de x en fonction du temps - appelée 'l'équation horaire'.

(b) **Frottement solide**

On considère maintenant que la réaction de la pente sur la masse se fait avec du frottement solide dynamique. Si on décompose la force de réaction totale en composantes parallèle et normale au plan de contact $\vec{R} = R_T\vec{e_x} + R_N\vec{e_y}$, la première loi de Coulomb explicite que pour un frottement solide, le mouvement avec glissement se produit pour $R_T = fR_N$.

1. Pour les mêmes conditions initiales que avant, donnez encore l'expression de x en fonction de t. On suppose que la condition du mouvement avec glissement est réalisée dès le début - c'est à dire on néglige le frottement solide statique initial.
2. Maintenant on lance la masse vers le haut de la pente avec une vitesse initiale de valeur v_A parallèle à x depuis un point A tel que $|\overrightarrow{OA}| = L$. Le point A se trouve à une hauteur h_0. Donnez l'expression de x en fonction de t dans la phase où elle remonte la pente. Quelle est la distance maximale parcourue par la masse dans l'ascension et la hauteur maximale atteinte ?

(c) **Frottement fluide**

La masse est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -k\vec{v}$; il n'y a pas de frottement solide et les conditions initiales restent les mêmes qu'au début.

Quelle est la dimension de k ? Ecrivez l'équation différentielle du mouvement. Montrez que la masse atteint une vitesse limite v_l et l'exprimer en fonction de m, g, k et α. Si vous êtes motivés, trouvez encore les expressions de v et x en fonctions de t.

Exercice 2: Balistique avec frottements : trajectoire et cas limite sans frottements
On considère un projectile balistique de masse m (par exemple une sphère) soumis à une force de frottement fluide de la forme $\vec{F}_f = -b\vec{v}$, où $\vec{F}_f$ est la force de frottement, b un coefficient dépendant de la forme de la bille et de la viscosité du fluide.

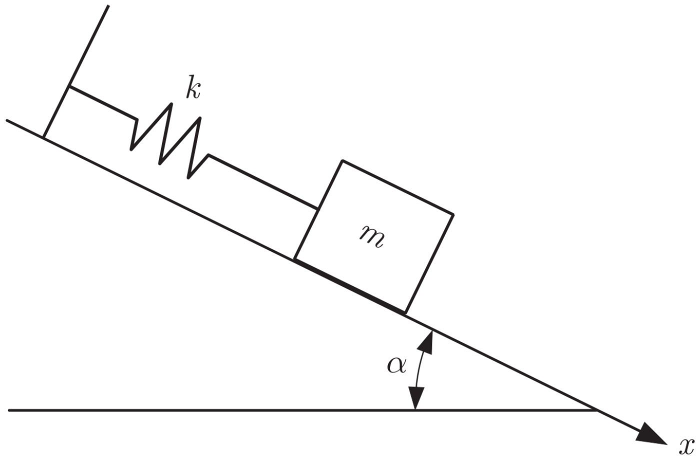
(a) A partir des équations horaires déterminées au cours, déterminer la trajectoire du projectile.

$$x(t) = x_0 + v_{x0}\tau \left(1 - \exp\left\{-\frac{(t-t_0)}{\tau}\right\}\right),$$
$$z(t) = z_0 - \tau g(t-t_0) + (g\tau^2 + \tau v_{z0}) \left(1 - \exp\left\{-\frac{(t-t_0)}{\tau}\right\}\right),$$

où $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, $v_x(t_0) = v_{x0}$, $v_z(t_0) = v_{z0}$ et $\tau = \frac{m}{b}$.

(b) Montrer que dans la limite $b \to 0$ (ou $\tau \to \infty$) on retrouve bien la trajectoire parabolique de la balistique sans frottements.
Indication : $\ln(1-t) \simeq -t - \frac{t^2}{2}$, pour $|t| \ll 1$.

Exercice 3: Oscillateur sur un plan incliné
Un point matériel pesant, de masse m, est astreint à se déplacer sur une droite inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Il n'y a pas de frottement. Le point matériel est retenu par un ressort de longueur au repos L et de constante élastique k.



(a) Etablir le bilan des forces.
(b) Trouver l'équation du mouvement.
(c) Quelle est la période des oscillations ?

Exercice 4: Integration par la méthode de séparation des variables
Résoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de séparation des variables.

(a)
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y} \qquad \text{avec} \quad y(1) = 2,$$

(b)
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{y\cos(x)}{1+2y^2} \qquad \text{avec} \quad y(0) = 1.$$

Pour cette deuxième équation, on se contentera d'une forme implicite. Indication : $\frac{\mathrm{d}\ln(y)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y}$.