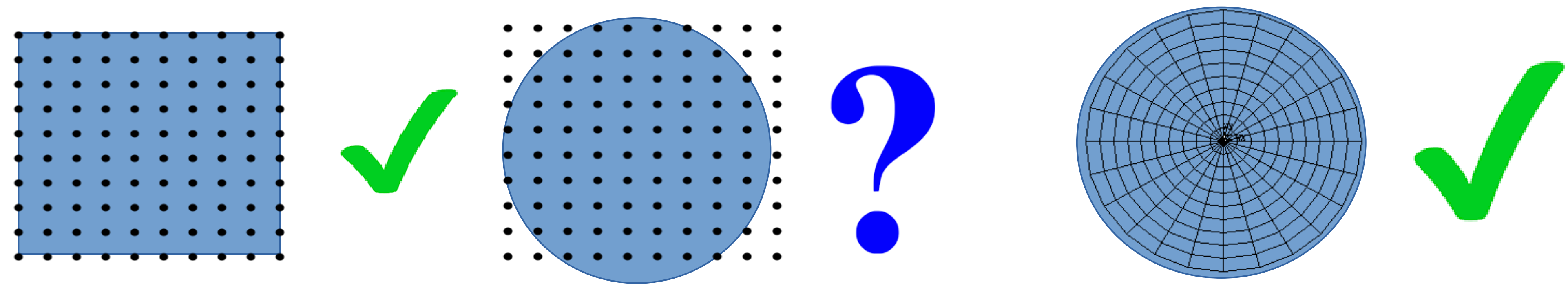
Cours 7: mercredi 6 Nov 24

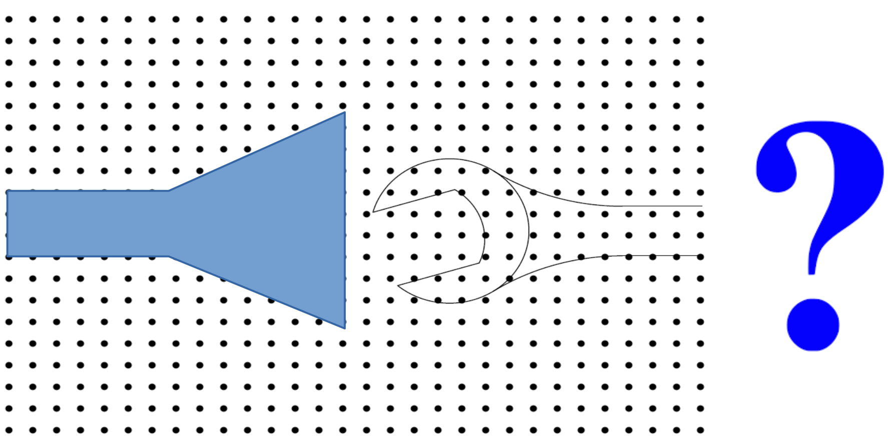
Intérêts des éléments finis
Matrices élémentaires, assemblage et intégration de Gauss-Legendre
Modélisation aux EF.

Avantages :
On peut traiter des géométries complexes (impossible analytiquement).
S'avère utile quand les expériences sont impossibles, chères, dangereuses, trop longues etc.
On obtient une information « complète » (résolue en temps / espace).

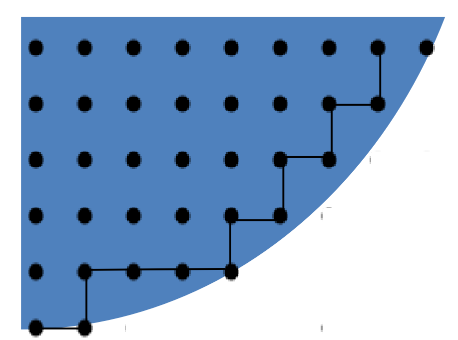
Inconvénient / risque :
On peut facilement obtenir des résultats plaisants mais faux
Il est important de comprendre la méthodologie, de justifier les hypothèses de modélisation, de vérifier la convergence (indépendance à la finesse du maillage, etc…)
Ce n'est pas un substitut à la théorie et aux expériences, mais un outil complémentaire.

Les différences finies imposent un maillage structuré d'où un pb sur les frontières incurvées et sur les C.L.

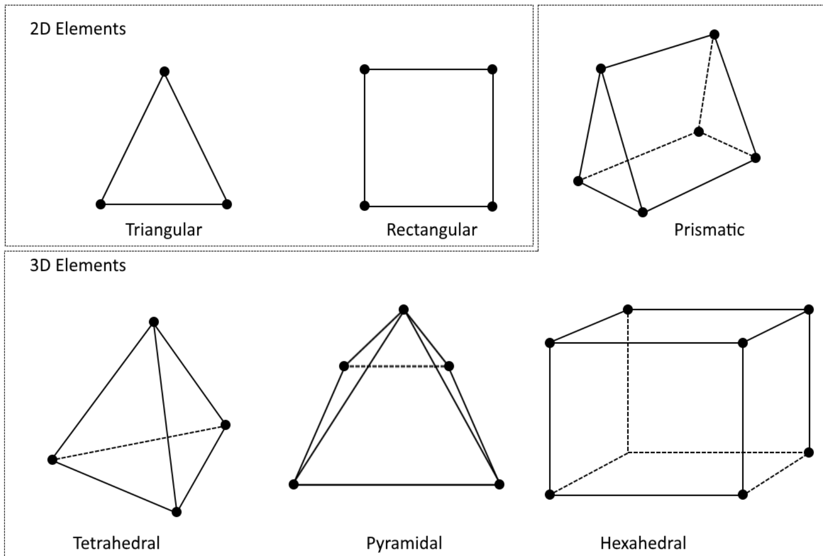


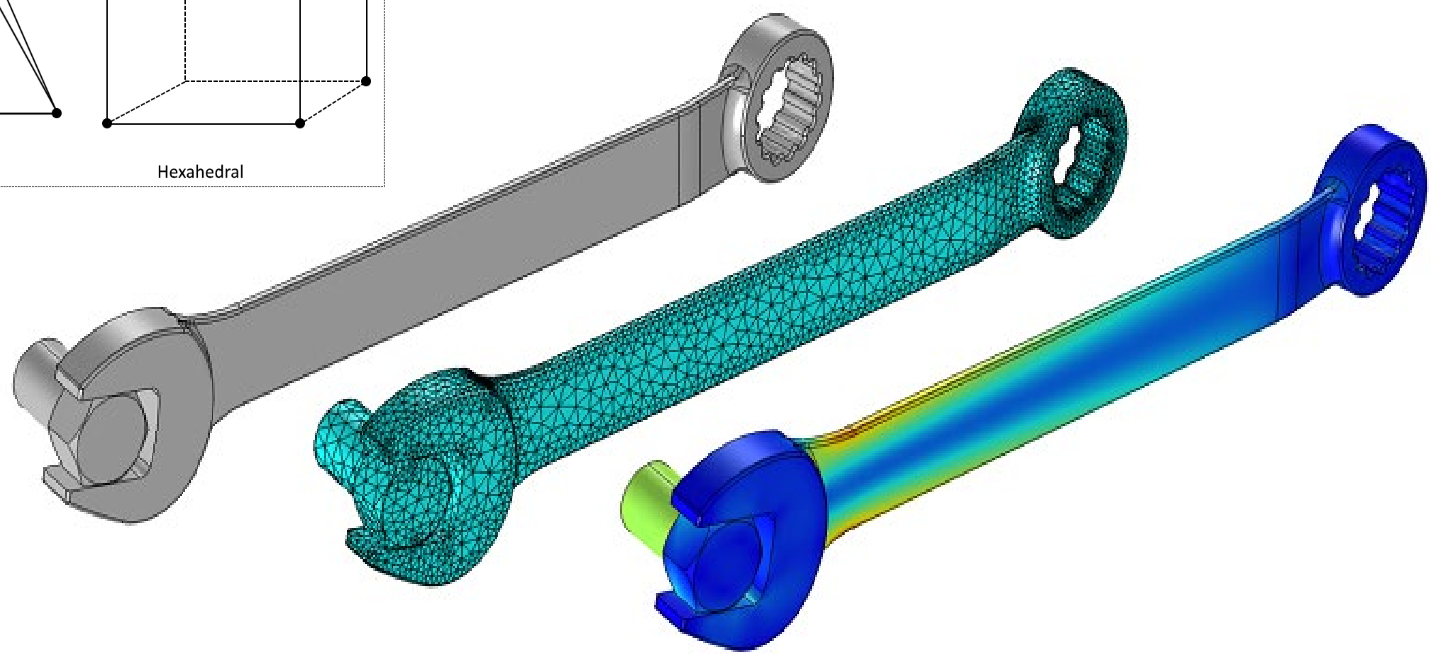


BCs are not correctly applied on round surfaces

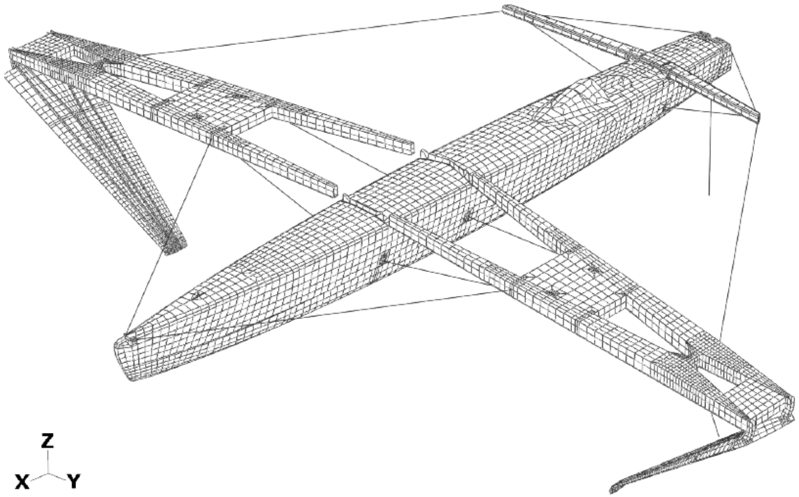


Les éléments finis permettent de mailler des géométries complexes 2D ou 3D: ils permettent de mailler les pièces dans les détails.

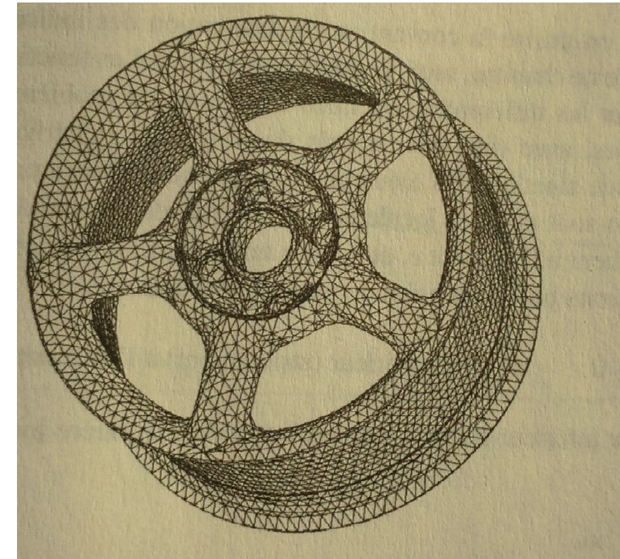




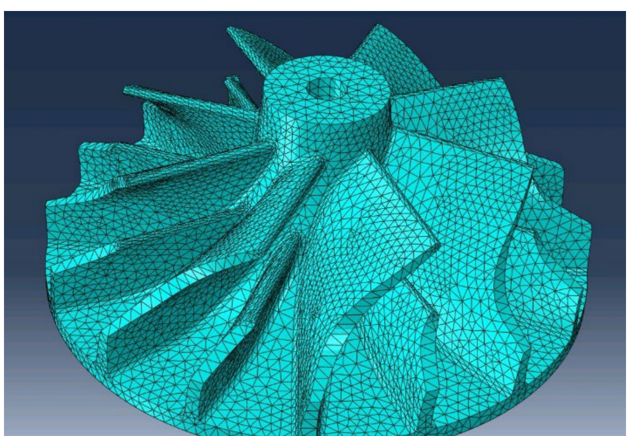
Géométries complexes

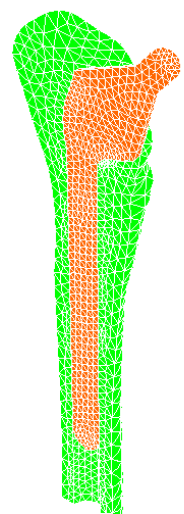


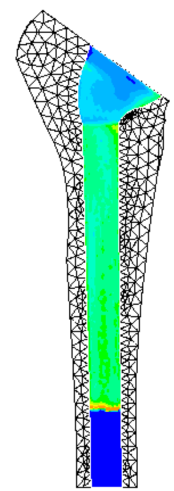
An much more complex mesh of an Hydroptere



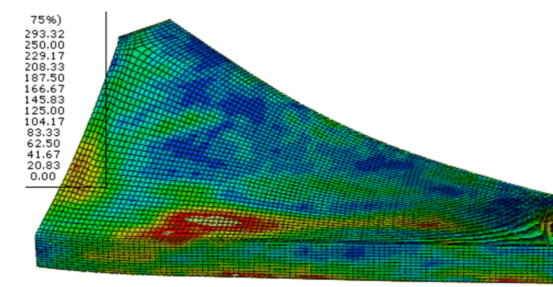
Maillage en éléments finis d'une jante de roue automobile.



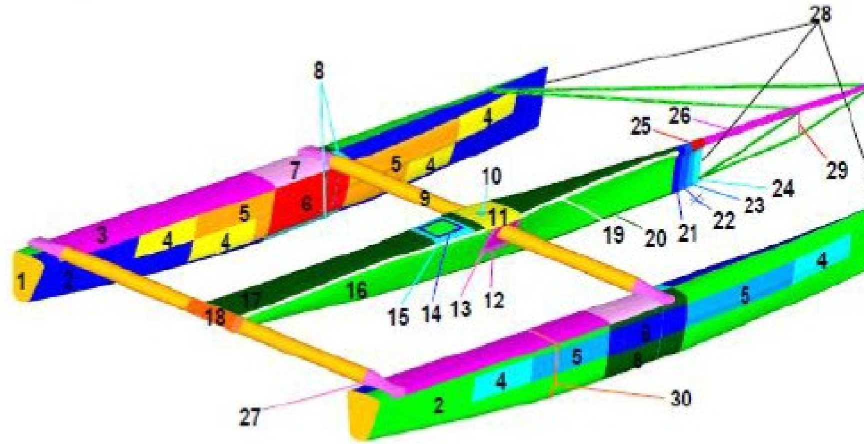


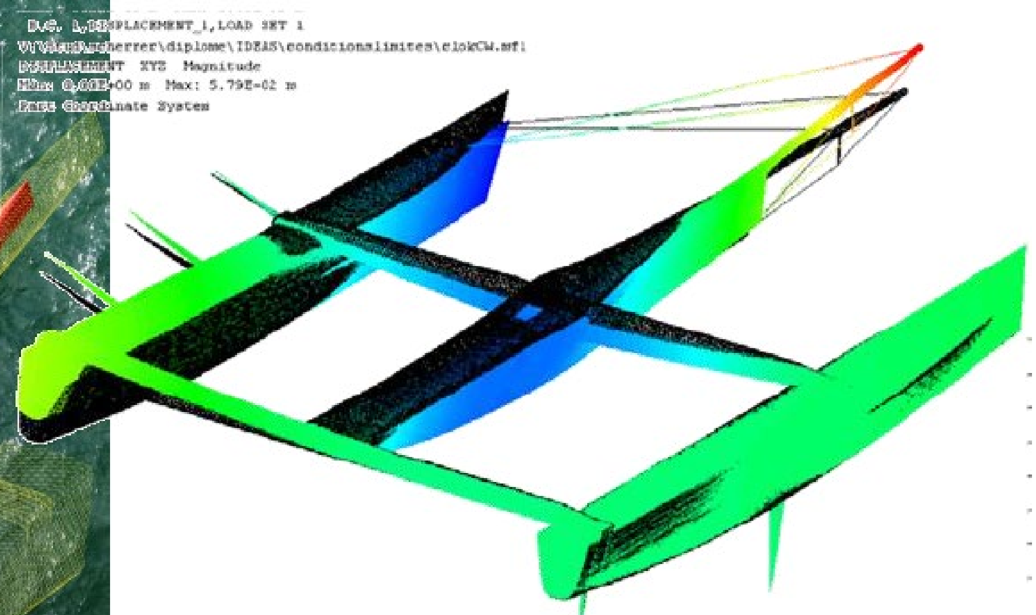


Distribution of contact pressure in femur.

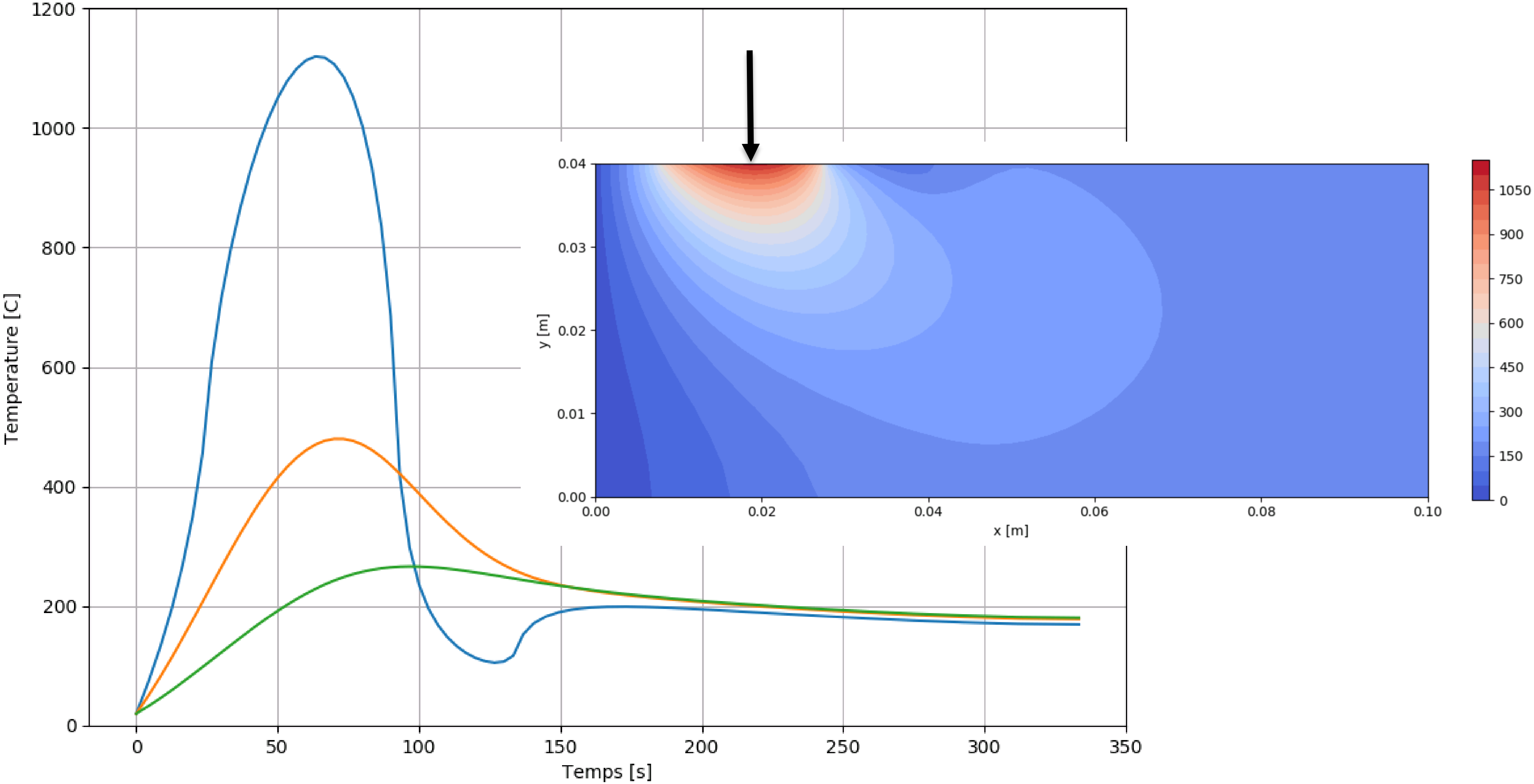


Géométrie complexe et structure composite
(30 matériaux différents)





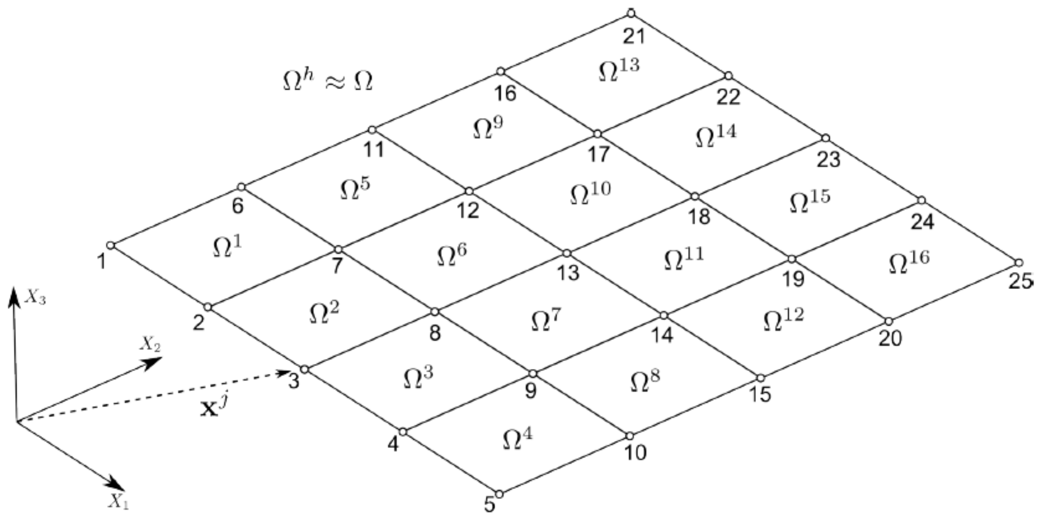
Intérêt des éléments finis: affinage local du maillage là où la solution est censée varier fortement.



Champ thermique stationnaire sous un laser

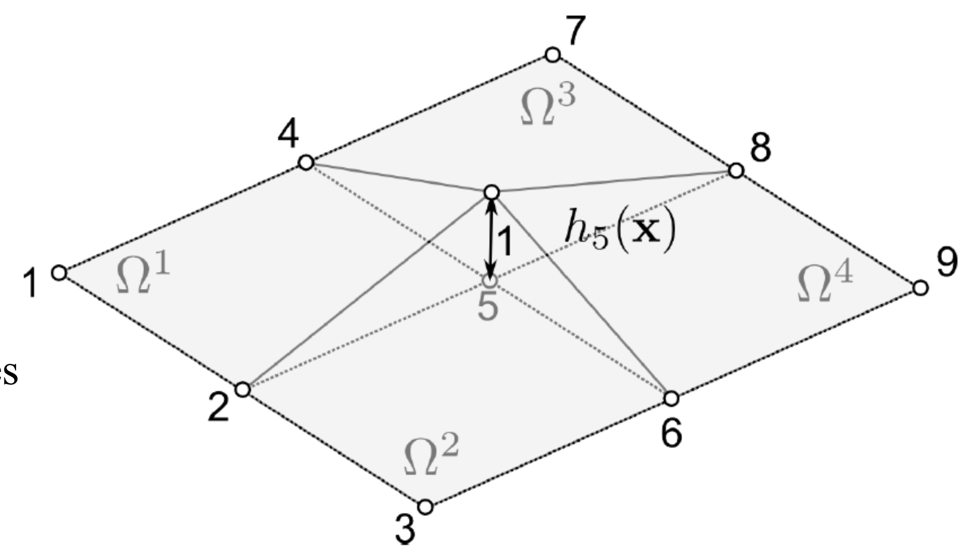
Matrices élémentaires

$$\Omega^h \approx \Omega \quad , \quad \Omega^h = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \ldots \cup \Omega^n$$



A simple mesh made of 16 elements and 25 nodes

Choix des fonctions de forme: linéaire, quadratique, hybride ...etc



An illustration of $h_5(\mathbf{x})$ showing the compact support property

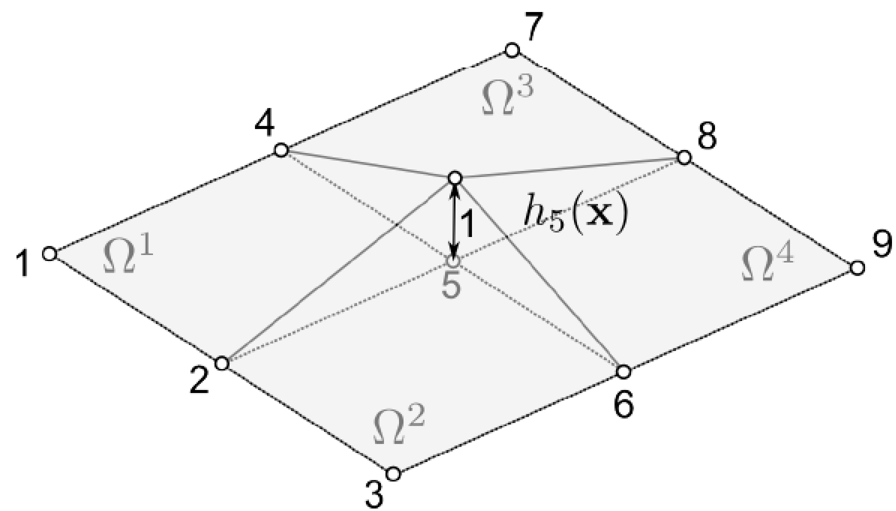
Matrices de masse $M_{ij} = \int_\Omega \varphi_i \varphi_j dV$ pour les pbs transitoires

et de rigidité $A_{ji} = \int_\Omega \varepsilon \vec{\nabla}\varphi_i \vec{\nabla}\varphi_j dV + \int_\Omega \left(\vec{v}(x,t) . \vec{\nabla}\varphi_i \right) \varphi_j dV$

Matrices élémentaires

Intégration: réduction sur les supports des fonctions de forme

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega^1} d\Omega + \int_{\Omega^2} d\Omega + \int_{\Omega^3} d\Omega + \int_{\Omega^4} d\Omega$$

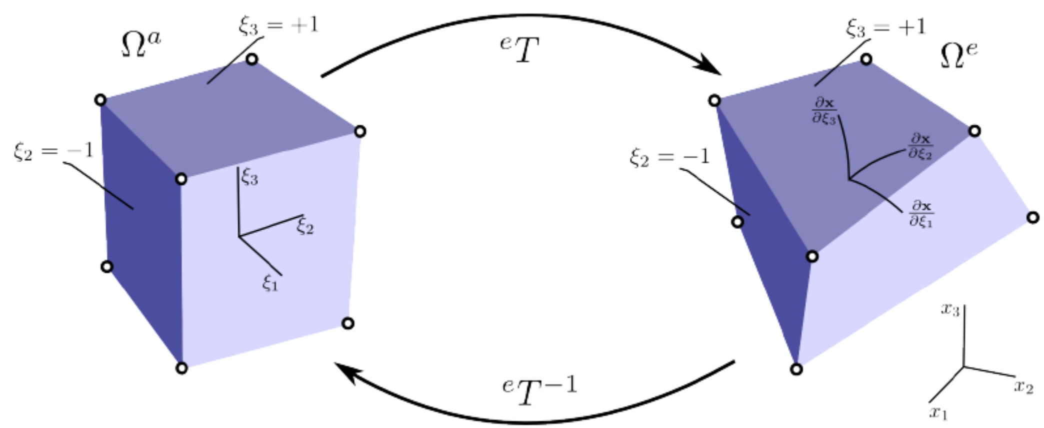


Matrices élémentaires sur l'élément Ω_e: masse $M^e_{ij} = \int_{\Omega e} \varphi_i \varphi_j dV$

et rigidité $A^e_{ij} = \int_{\Omega e} \varepsilon \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j dV + \int_{\Omega e} \left(\vec{c}(x,t).\vec{\nabla}\varphi_i\right)\varphi_j dV$

Matrices élémentaires et assemblage

Le calcul des matrices élémentaires se fait avec une transformation d'espace sur un élément maitre (triangle/carré unité en 2D ou cube unité en 3D):



An illustration of the coordinate transform ${}^eT$

Assemblage: sommation des matrices élémentaires de chaque élément du maillage pour former **les matrices globales** A, M et le vecteur second membre f.

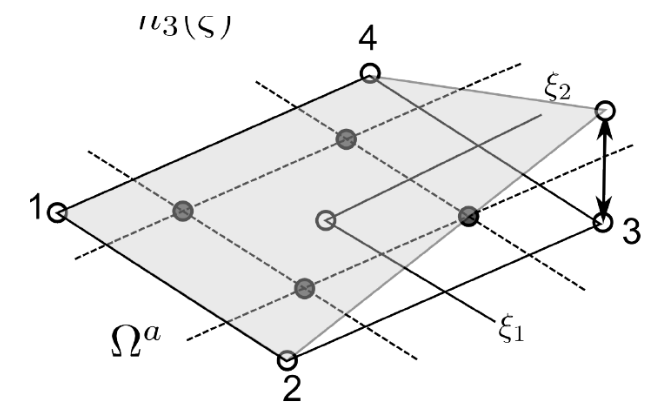
NB: Abaqus fait une renumérotation interne des éléments pour diminuer la largeur de bande des matrices.

Matrices élémentaires : intégration de Gauss-Legendre

Calcul numérique des matrices élémentaires sur l'élément maitre:

intégration 1D de Gauss-Legendre à l'aide de r points de Gauss (ξ_j^i)

et r poids de Gauss ω_j^i: $$\int_{-1}^{+1} (\cdot)\, d\xi_j \approx \sum_{i=1}^{r} \omega_j^i (\cdot)\,|_{\xi_j=\xi_j^i}$$



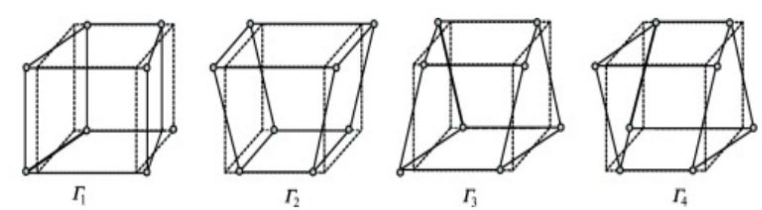
4 points de Gauss d'un élément quadrangle.

Intégration généralisée en 3D:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\cdot)\, d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} \omega_1^i \omega_2^j \omega_3^k (\cdot)\,|_{\xi_1=\xi_1^i,\xi_2=\xi_2^j,\xi_3=\xi_3^k}$$

Les résultats EF sont exprimés :

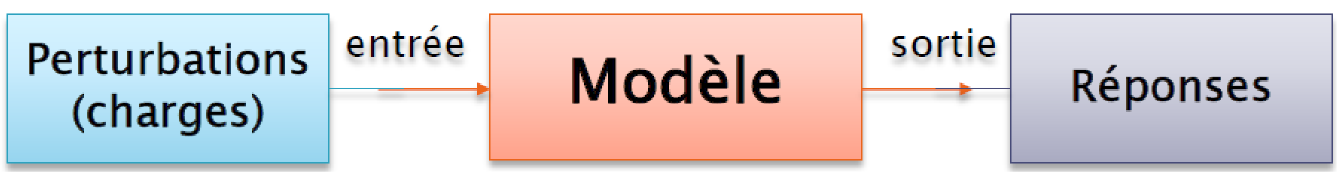
- aux noeuds (température, déplacements, ...)
- ou aux points de Gauss (contraintes, déformation, flux, ...)



Les déplacements sont des valeurs nodales.

Modélisation / simulation aux éléments finis

- **Modèle** = **Abstraction** de la réalité dans un **but précis**
- **Expérience** = « Stimuler / perturber » un système pour en évaluer ses réponses
- **Simulation** = Expérience virtuelle = « Perturber / stimuler » un modèle du système pour en évaluer ses réponses



Un modèle devient **prédictif** quand il a été rigoureusement validé en comparant calculs et mesures (le plus de validations possibles).
Une analyse aux éléments finis consiste donc à modéliser (phénomènes physiques prépondérants), calculer, valider puis **extrapoler** à d'autres situations.

Analyse aux éléments finis

Un modèle aux EF est défini par:

- un maillage recouvrant les domaines nécessaires (nœuds, éléments et connectivité) en 1D, 2D, Axi ou 3D
- la physique du problème (thermique, thermo-mécanique, thermo-électrique, contacts …) avec ses conditions initiales et aux limites
- le choix de fonctions de forme (linéaire, quadratique, hybride ….)
- les propriétés des matériaux (thermiques, élastiques, plastiques, …)
- et les étapes de chargement (steps).

Etape primordiale: vérifier que la solution est INDEPENDANTE de la finesse du maillage : «convergence du maillage» (ni trop grossier, suffisamment fin …).

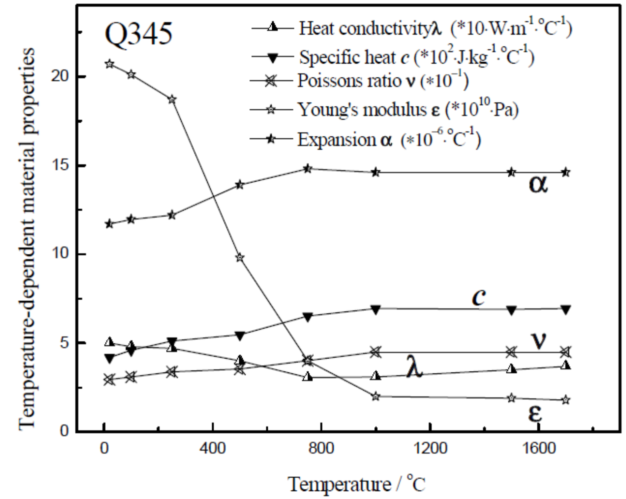
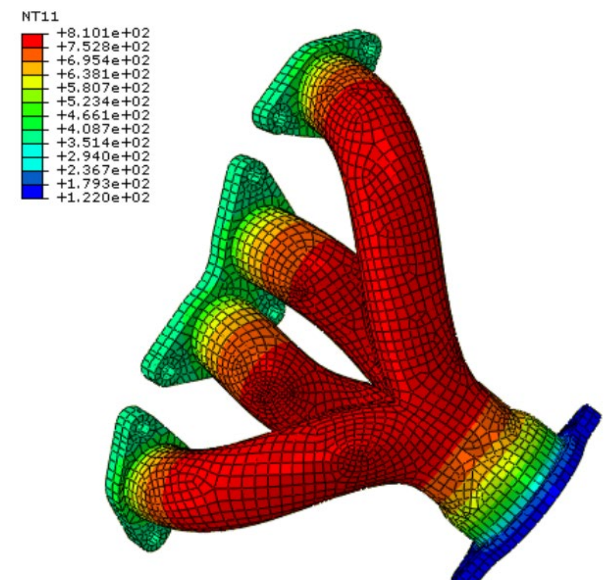


Figure 10. Temperature-dependent material properties of Q345 steel.



Champ thermique stationnaire d’un collecteur d’échappement

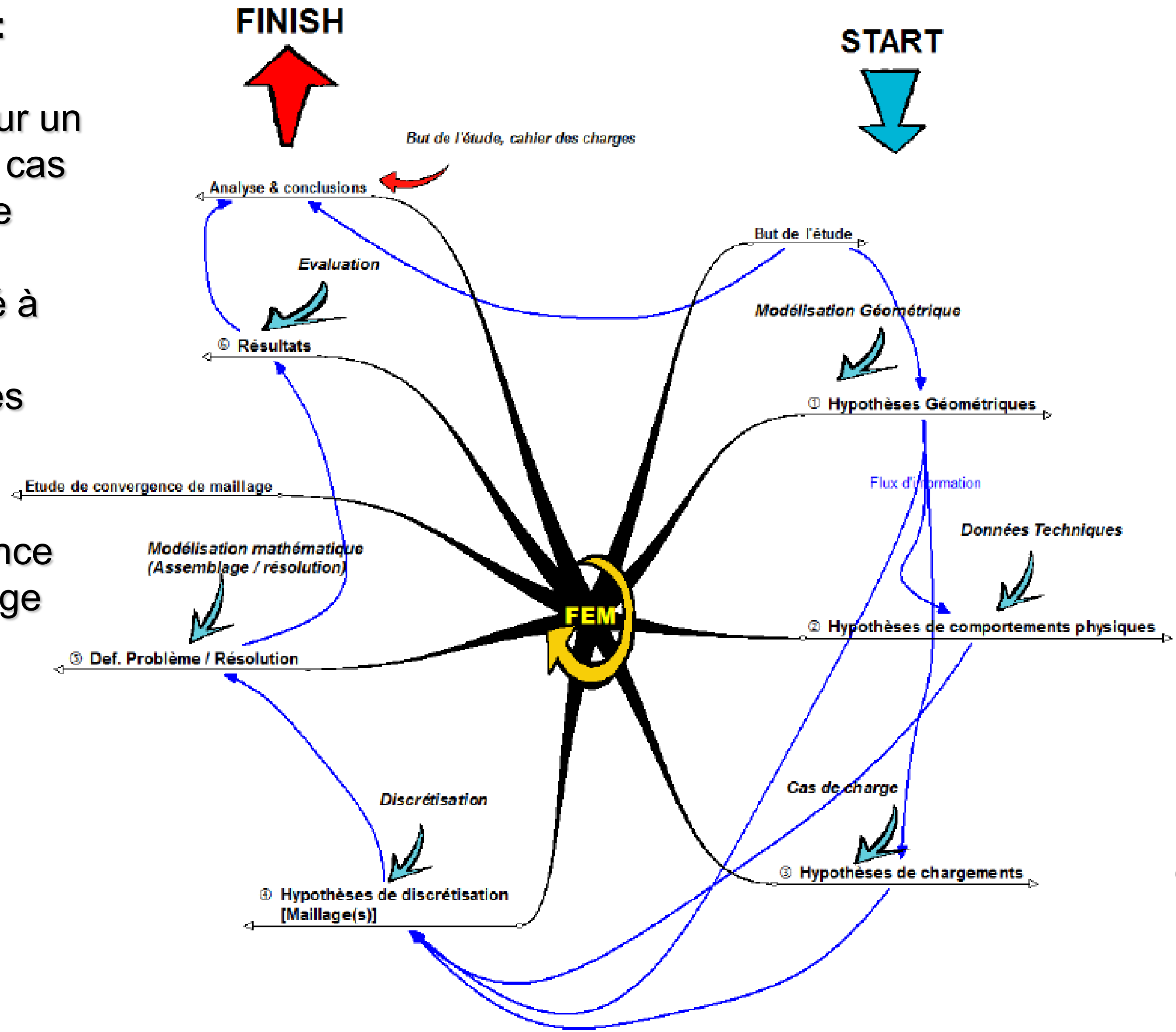
Modélisation et simulation aux éléments finis: inputs et outputs

Outputs:

- résultats pour un ou plusieurs cas de charge

- sensibilité à certains paramètres

convergence du maillage



3 inputs principaux:

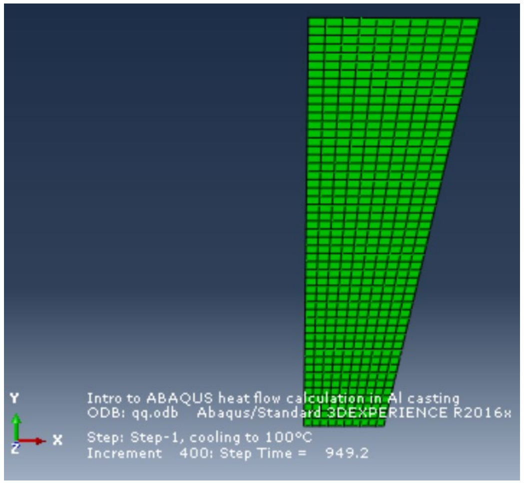
géométries

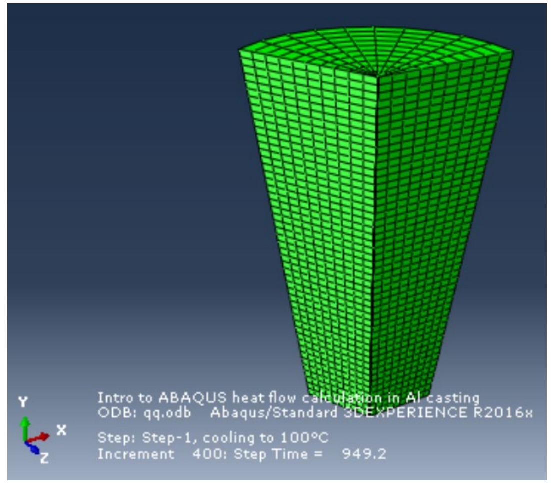
comportements

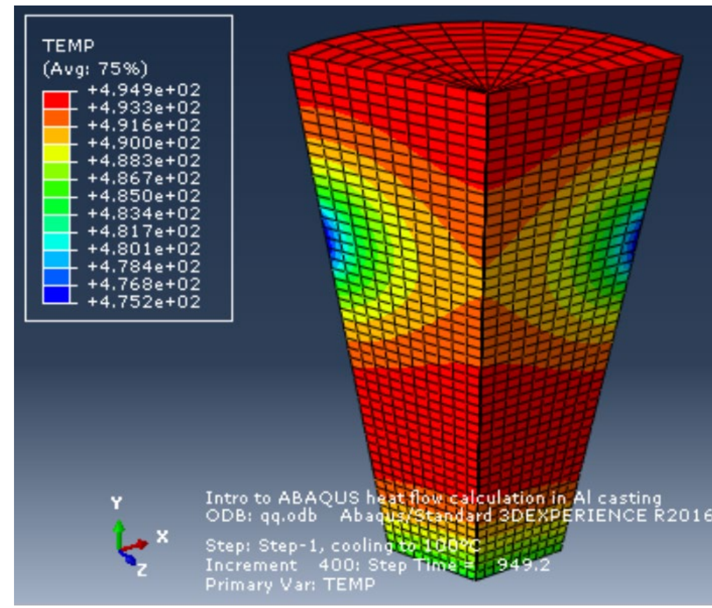
chargements (C.L)

Cours 8: mercredi 13 Nov 24 en salle informatique MXF-014

Cas de thermique transitoire sur Abaqus: refroidissement d’une pièce axisymétrique.







La géométrie et les C.L sont axisymétriques: on travaille en coordonnées cylindriques