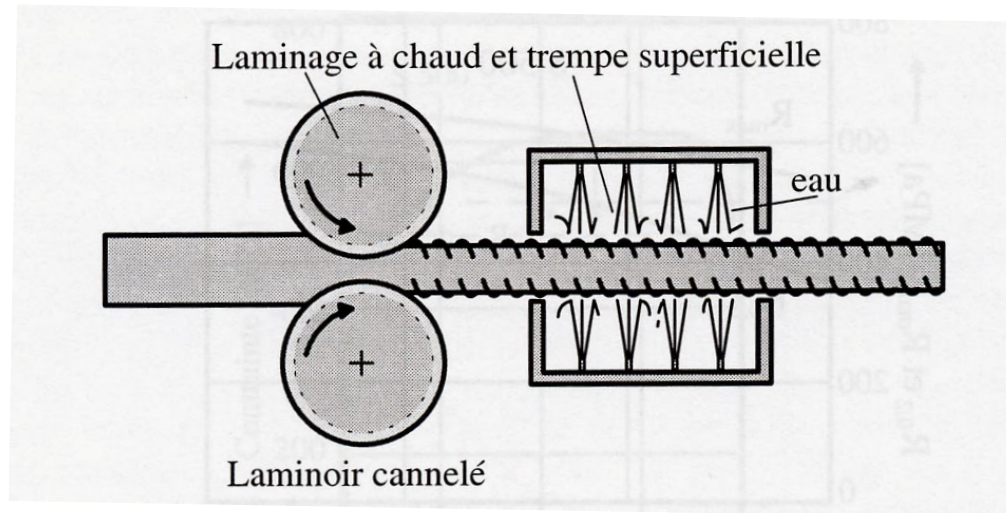


Cours 6

Problèmes de convection-diffusion 1D et 2D et éléments finis

Un exemple : champs thermique stationnaire (approche eulérienne) d'un traitement continu de durcissement surfacique d'un acier par trempe superficielle.



Problème 1D de convection-diffusion et éléments finis

Soit $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ et $c : x \in [0, 1] \rightarrow c(x) \in \mathbb{R}$ deux fonctions continues données et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Nous cherchons une fonction $u : x \in [0, 1] \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x) \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Le problème (14.1) est appelé problème de **convection-diffusion stationnaire**. Le terme de diffusion est $-\varepsilon u''(x)$ alors que le terme de convection est $c(x)u'(x)$. La fonction $c(x)$ est la vitesse.

Ex1: conservation du soluté de concentration $c(x)$ stationnaire ($v(x)$ =vitesse):

$$V(x) \cdot \nabla c + \operatorname{div}(-D \nabla c) = 0 \quad \text{avec } D \text{ en m}^2/\text{s (coefficient de diffusion)}$$

Ex2: conservation de l'énergie $T(x)$ en régime stationnaire avec terme de source:

$$\rho C_p V(x) \cdot \nabla T - k \Delta T = Q_T$$

Problème 1D de convection-diffusion et éléments finis

Cas $c = c_0 =$ vitesse cste et $f = f_0 =$ cste : $-\varepsilon u''(x) + c_0 u'(x) = f_0$ avec $u(0) = u(1) = 0$.

Solution particulière: $u = ax$ donne $a = f_0 / c_0$

Solution homogène: $-\varepsilon u''(x) + c_0 u'(x) = 0$ donne $u'(x) = B e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x}$, $u(x) = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x}$

Solution générale: $u = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x} + f_0 x / c_0$

$u(0) = A + \frac{\varepsilon}{c_0} B = 0$. et $u(1) = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon}} + f_0 / c_0 = 0$.

soit $B = f_0 / \varepsilon \left(1 - e^{\frac{c_0}{\varepsilon}} \right)$ et $A = -\frac{\varepsilon}{c_0} B$

soit $u(x) = \frac{f_0}{c_0} \left(x - \frac{1 - e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x}}{1 - e^{\frac{c_0}{\varepsilon}}} \right)$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

$$u(x) = \frac{f_0}{c_0} \left(x - \frac{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon} x}}{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}} \right) = \frac{f_0}{c_0} \left(x - \frac{1 - e^{x/\delta}}{1 - e^{1/\delta}} \right) \text{ avec } \delta = \varepsilon / c_0 \text{ [m]}$$

si $c_0 > 0$ et $\frac{c_0}{\varepsilon}$ est très grand (convection très grande devant la diffusion),

alors δ est très petit et $u(x) = x \frac{f_0}{c_0}$ pour $x \leq 1 - \delta$

$u(x)$ redescend vers 0 en $x = 1$ sur une couche limite δ

Cette couche limite δ est d'autant plus fine que $\frac{c_0}{\varepsilon}$ est grand

exemple pour thermique dans l'Aluminium:

$$\rho C_p V \cdot \nabla T - k \Delta T = \dot{Q}_T \text{ avec } V = c_0 \geq 0.$$

$$-\varepsilon \Delta T + V \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho C_p} \dot{Q}_T \text{ avec } V = c_0 \text{ et } \varepsilon = \frac{k}{\rho C_p}, \text{ diffusivité thermique}$$

Couche limite pour l'Alu: $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

si $c_0 = 1 \text{ m/s}$, $\delta = \varepsilon / c_0 = 10^{-4} \text{ m} = 100 \text{ } \mu\text{m}$

si $c_0 = 1 \text{ mm/s}$, $\delta = \varepsilon / c_0 = 10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$

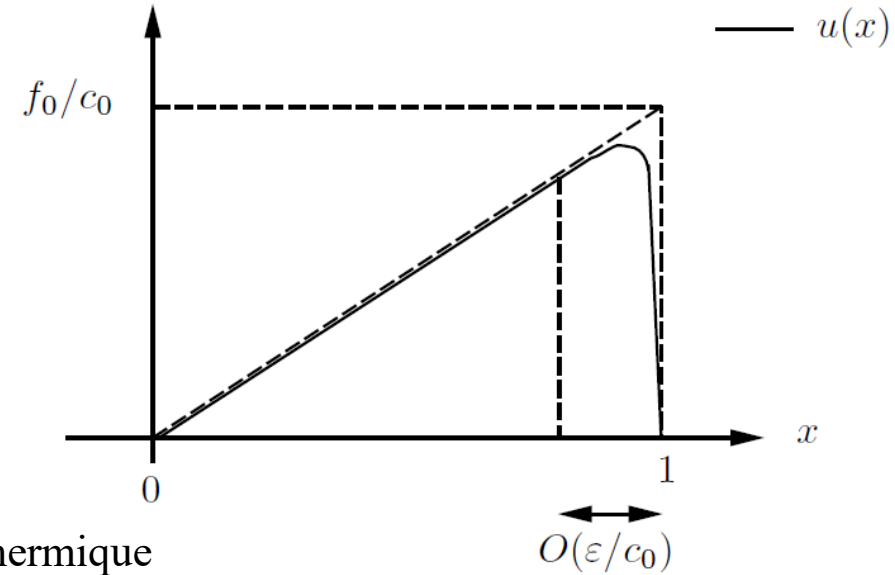
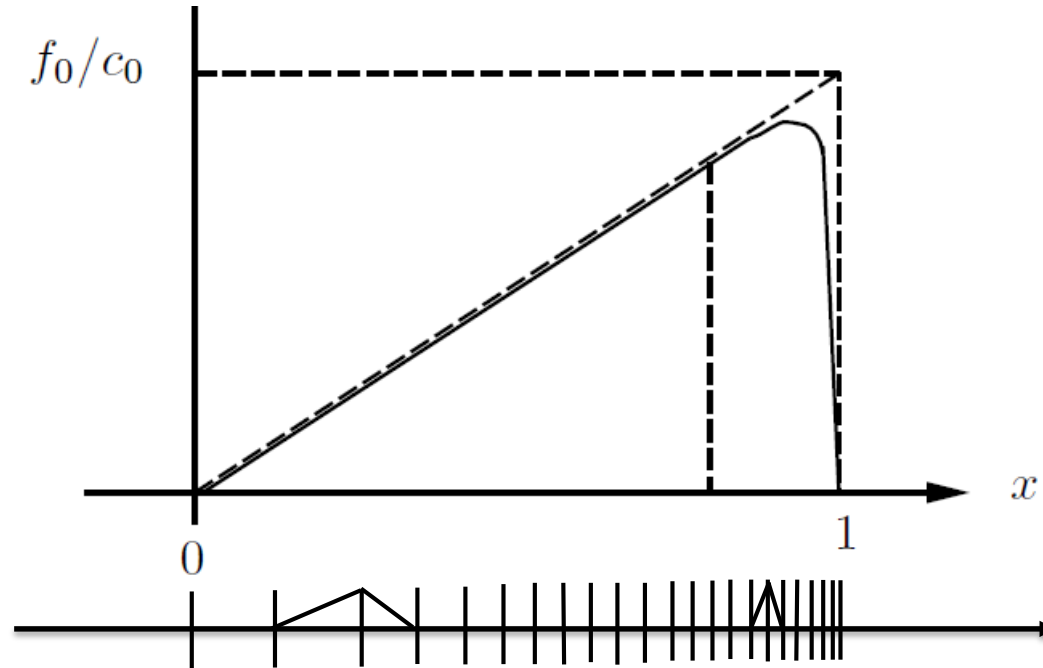


Fig. 14.1 Solution $u(x)$ lorsque $\varepsilon \ll c_0$.

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

2 stratégies de résolution numérique pour “capturer” cette couche limite:

- affiner les éléments finis en approchant $x = 1$ (intérêt des EF comparés aux différences finies ...)
- ou utiliser des fonctions d'interpolation présentant un upwind (SUPG, streamline upwind Petrov-Galerkin, éléments dccax4 dans abaqus).



Abaqus: *ngen, bias = 1.1 (progression géométrique de raison 1.1)

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D par les éléments finis

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x) \quad \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Formulation faible: on multiplie par $v(x)$ continue, de première dérivée $v'(x)$ continue par morceaux sur $[0, 1]$ et telle que $v(0)=v(1)=0$. L'ensemble V de ces fonctions v est un e.v de dimension infini.
On obtient la formulation faible du problème:

Nous cherchons une fonction $u \in V$ telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx \\ = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

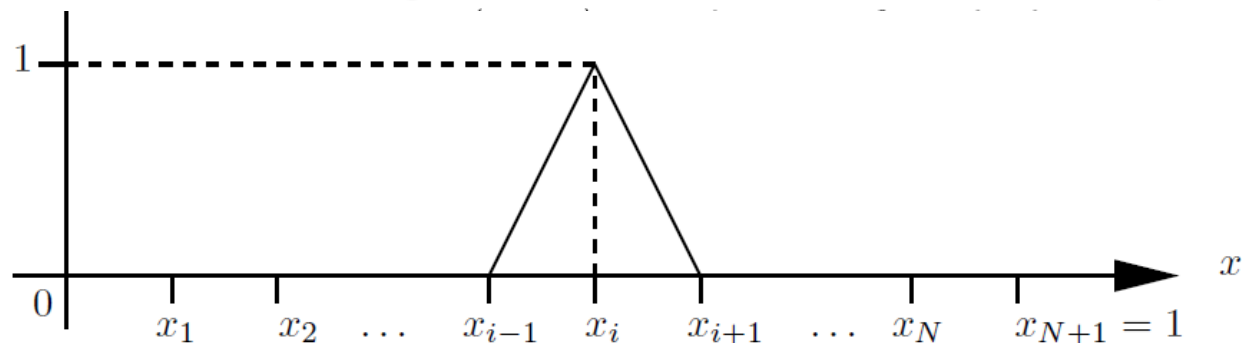
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Éléments finis linéaires en 1D: fonctions chapeaux

Soit N points $x_1, \dots, x_N$ situés à l'intérieur de l'intervalle $[0, 1]$ tels que $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1 = x_{N+1}$. Considérons les N fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ définies de la façon suivante :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases}$$

Les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ appartiennent à l'espace V et sont linéairement indépendantes. Soit V_h l'espace engendré par les combinaisons linéaires de $\varphi_1, \dots, \varphi_N$.



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution avec les éléments finis linéaires (fonctions chapeau)

On cherche $u_h \in V_h$ tel que pour tout v_h de V_h , on ait

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h'(x) v_h(x) dx \\ = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Exprimons u_h comme combinaison linéaire de $\varphi_1, \dots, \varphi_N$, c'est-à-dire

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

Cela revient à chercher $u_1, u_2, \dots, u_N$ tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left(\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx \\ = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires:

Il faut résoudre le système $A\vec{u} = \vec{f}$ avec :

$$A_{ji} = \int_0^1 \left(\varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

où $c(x) = c_0 = \text{constante}$, $f(x) = f_0 = \text{constante}$ et lorsque les points $x_1, \dots, x_N$ sont uniformément répartis ($h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$,

Attention : $A_{ij} \neq A_{ji}$ (sauf si $c(x) = 0$) !!

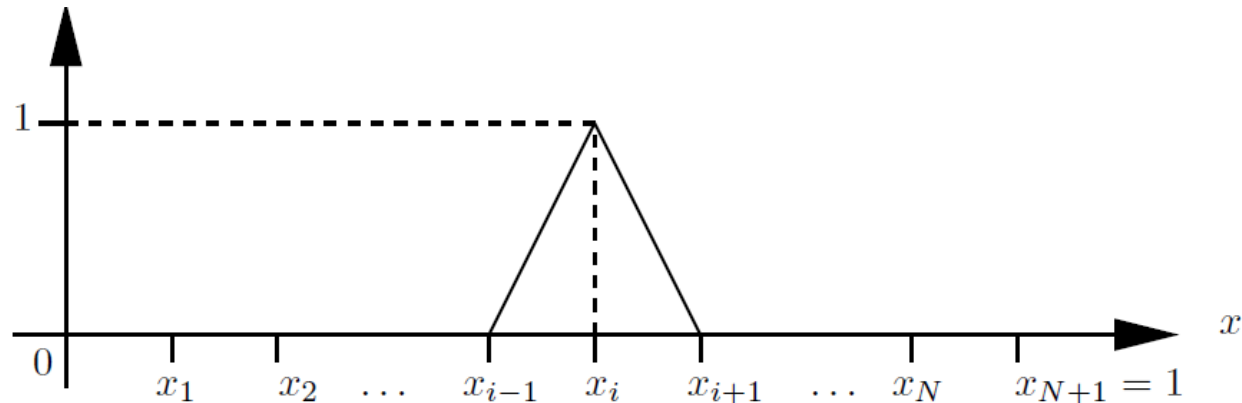
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires et un maillage régulier:

$$\text{Termes diagonaux } A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$$

$$A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{h^2} dx + \frac{c_0}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx - \frac{c_0}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i dx$$

$$A_{ii} = \frac{2h\varepsilon}{h^2} = \frac{2\varepsilon}{h}$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires et un maillage régulier:

Calcul des $A_{i,i+1}$ et f_j avec $f(x) = f_0 = \text{cste}$

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$$

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon \left(\frac{-1}{h} \right) \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c_0 \varphi_i \frac{1}{h} dx$$

$$A_{i,i+1} = \varepsilon \left(\frac{-1}{h^2} \right) h + \frac{c_0}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i dx$$

$$A_{i,i+1} = \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{h} \frac{h}{2} = \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2}$$

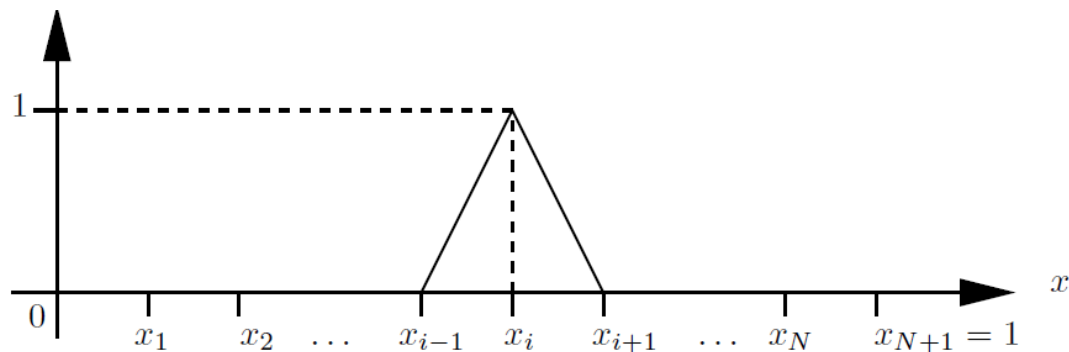
De même, on montre que (exo):

$$A_{i-1,i} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{h} \frac{h}{2} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2}$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

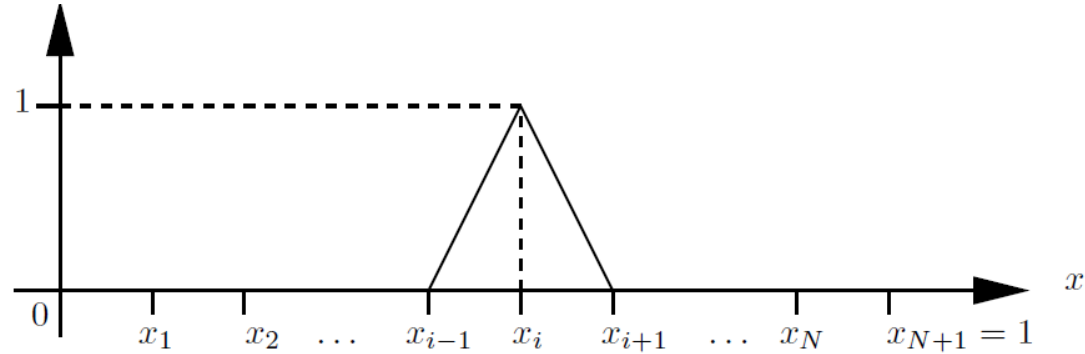
$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = f_0 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) dx + f_0 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) dx$$

$$f_j = f_0 \left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) = hf_0$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Exo 6a: montrer que $A_{i-1,i} = -\varepsilon/h - c_0/2$ et $f_j = h f_0$ avec $f(x) = f_0 = \text{cste}$ et $c(x) = c_0$ pour le pb de convection-diffusion 1D avec des fonctions linéaires (fonctions chapeaux).



$$A_{ji} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_j' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_j' dx$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires:

$A\vec{u} = \vec{f}$ avec A matrice $N \times N$ tridiagonale

non symétrique à cause du terme de transport c_0

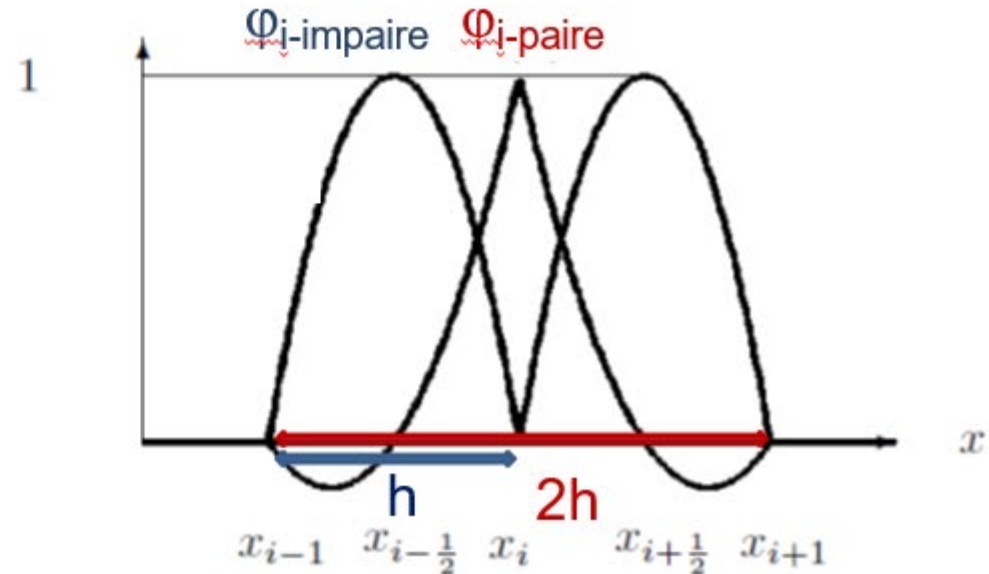
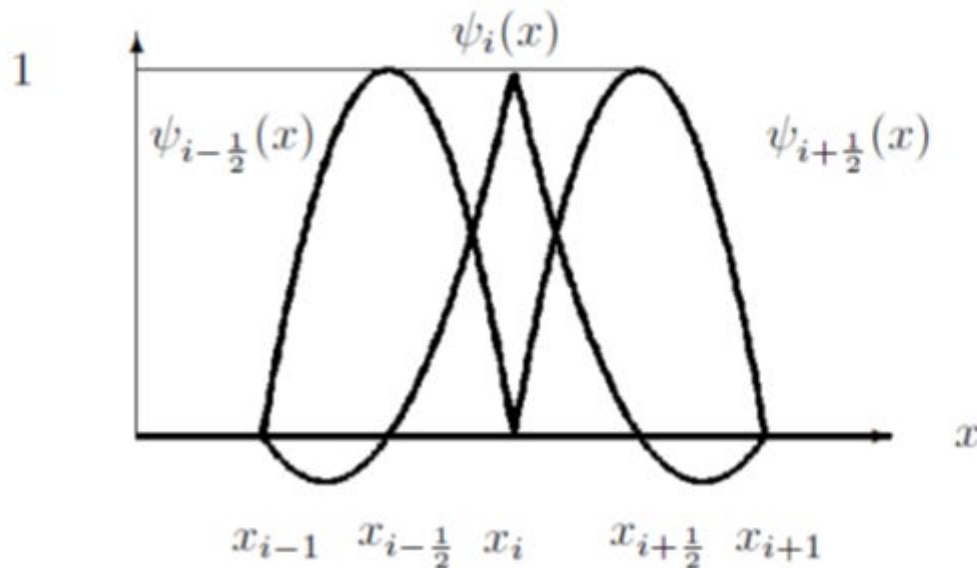
$$A = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon}{h} & -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2} & & & \\ -\frac{\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2} & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2} \\ & & & -\frac{\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2} & \frac{2\varepsilon}{h} \end{bmatrix}$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis quadratiques et un maillage régulier:

Termes diagonaux $A_{ii, i \text{ impair}} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis quadratiques et un maillage régulier:

Termes diagonaux $A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$ **pour i impair**

$$i \text{ impair: } \varphi_i(x) = \psi_{i+1/2}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} \text{ sur } [x_i, x_{i+1}] \quad \psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

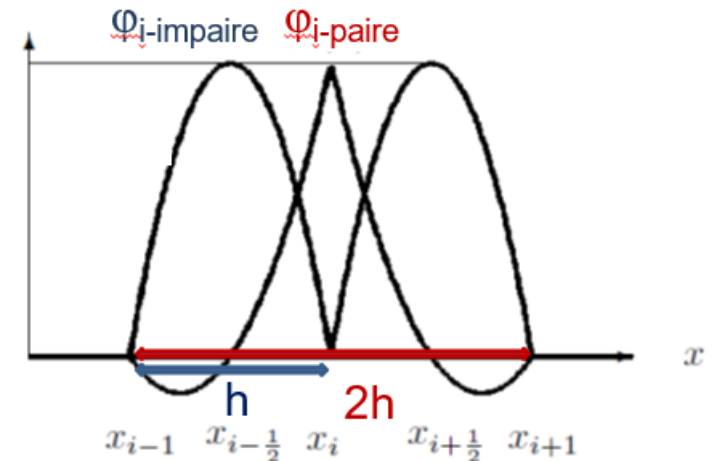
$$\text{et } \varphi_i'(x) = \frac{-4(2x-x_i-x_{i+1})}{hh} \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]$$

$$A_{ii} (i \text{ impaire}) = \frac{16\varepsilon}{h^4} \int_0^h (u-h+u)^2 du + \frac{16}{h^4} c_0 \int_0^h u(u-h)(2u-h) du \text{ avec } u = x-x_i = x-x_{i+1}+h$$

$$A_{ii} (i \text{ impaire}) = \frac{16\varepsilon}{h^4} \frac{1}{6} \left[(2u-h)^3 \right]_0^h + \frac{16}{h^4} c_0 \int_0^h (2u^3 - 3hu^2 + h^2u) du$$

$$A_{ii} (i \text{ impaire}) = \frac{16\varepsilon}{h^4} \frac{1}{6} \left[h^3 + h^3 \right] + \frac{16c_0}{h^4} \left[2\frac{u^4}{4} - hu^3 + \frac{h^2u^2}{2} \right]_0^h$$

$$A_{ii} (i \text{ impaire}) = \frac{16\varepsilon}{h} \frac{1}{3} + 16c_0 \left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{16\varepsilon}{3h}$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis quadratiques et un maillage régulier:

Termes $A_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$ **pour i pair**

i pair: le support commun entre φ_i et φ_{i+1} est $[x_i, x_{i+1}]$

sur $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\varphi_i(x) = \frac{2(x-x_{i+1})(x-x_{i+1/2})}{hh} = \frac{2(u-h)(u-h/2)}{hh} \text{ avec } u = x - x_i$$

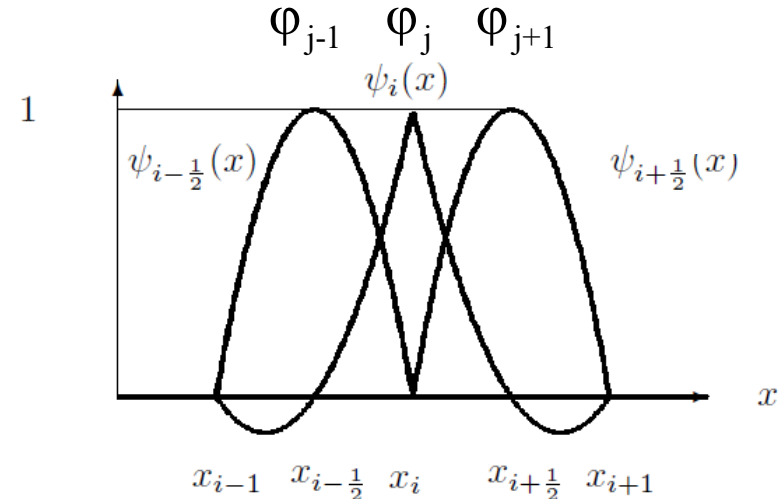
$$\varphi_i'(x) = \frac{2(u-h/2)+2(u-h)}{hh} = \frac{4u-3h}{hh}$$

$$\varphi_{i+1}(x) = \psi_{i+1/2}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} = \frac{-4u(u-h)}{hh}$$

$$\text{et } \varphi_{i+1}'(x) = \frac{-4(u-h)-4u}{hh} = \frac{-8u+4h}{hh}$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis quadratiques et un maillage régulier:

Termes $A_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$ pour i pair

sur $[x_i, x_{i+1}]$ avec $u = x - x_i$ variant de 0 à h:

$$\varphi_i(x) = \frac{2(x-x_{i+1})(x-x_{i+1/2})}{hh} = \frac{2(u-h)(u-h/2)}{hh}$$

$$\varphi_i'(x) = \frac{2(u-h/2)+2(u-h)}{hh} = \frac{4u-3h}{hh}$$

$$\varphi_{i+1}(x) = \psi_{i+1/2}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} = \frac{-4u(u-h)}{hh}$$

$$\text{et } \varphi_{i+1}'(x) = \frac{-4(u-h)-4u}{hh} = \frac{-8u+4h}{hh}$$

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx \text{ pour i pair}$$

$$A_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h^4} \int_0^h (4u-3h)(-8u+4h) du + \frac{c_0}{h^4} \int_0^h 2(u-h)(u-h/2)4(h-2u) du$$

$$A_{i,i+1} = \frac{4\varepsilon}{h^4} \int_0^h (4u-3h)(h-2u) du + \frac{8c_0}{h^4} \int_0^h (u-h)(u-h/2)(h-2u) du$$

$$A_{i,i+1} = \frac{4\varepsilon}{h^4} \int_0^h (-8u^2+10uh-3h^2) du + \frac{16c_0}{h^4} \int_0^h (-4u^3+4hu^2+h^2u-h^3) du$$

$$A_{i,i+1} = \frac{4\varepsilon}{h^4} \left[\frac{-8u^3}{3} + 5u^2h - 3uh^2 \right]_0^h + \frac{16c_0}{h^4} \left[-u^4 + \frac{4hu^3}{3} + \frac{h^2u^2}{2} - uh^3 \right]_0^h$$

$$A_{i,i+1} = \frac{4\varepsilon}{h} \left[\frac{-8}{3} + 2 \right] + 8c_0 \left[-1 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right]$$

$$A_{i,i+1} = -\frac{8\varepsilon}{3h} + 8c_0 \left[\frac{-1}{6} \right] = -\frac{8\varepsilon}{3h} - \frac{4}{3}c_0$$

Problème 2D de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 2D d'un pb de **convection-diffusion transitoire**:

Soit Ω un domaine polygonal dans le plan Ox_1x_2 , de frontière $\partial\Omega$ et soit $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Nous nous donnons une fonction $f : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$, une fonction vectorielle $\vec{c} : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{c}(x, t) \in \mathbb{R}^2$, un nombre positif ε et une fonction $w : x \in \overline{\Omega} \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$. Dès lors, nous posons le problème de chercher une fonction $u : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \varepsilon \Delta u(x, t) + \vec{c}(x, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u(x, t) \\ &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega, \end{aligned} \quad (14.24)$$

$\vec{c}(x, y, t) = \vec{v}(x, y, t)$ est le champ connu de vitesse

Ex: pb de la chaleur dans un fluide en mouvement: convection et diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}(x, y, t) \cdot \vec{\nabla} T - \frac{k}{\rho C_p} \Delta T = \frac{1}{\rho C_p} \dot{Q}_T(x, y, t)$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 2D d'un pb de convection-diffusion transitoire:

Triangulation du carré unité et définition de 16 fonctions chapeau localise sur les 16 points intérieurs du carré (points P_i et $h = 1/5$)

Une discrétisation standard (sect. 12.3) en espace de (14.24) par la méthode des éléments finis consiste à décomposer la solution approchée u_h dans la base $\varphi_1, \dots, \varphi_N$

$$u_h(x, t) = u_i(t) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{N=16} u_i(t) \varphi_i(x)$$

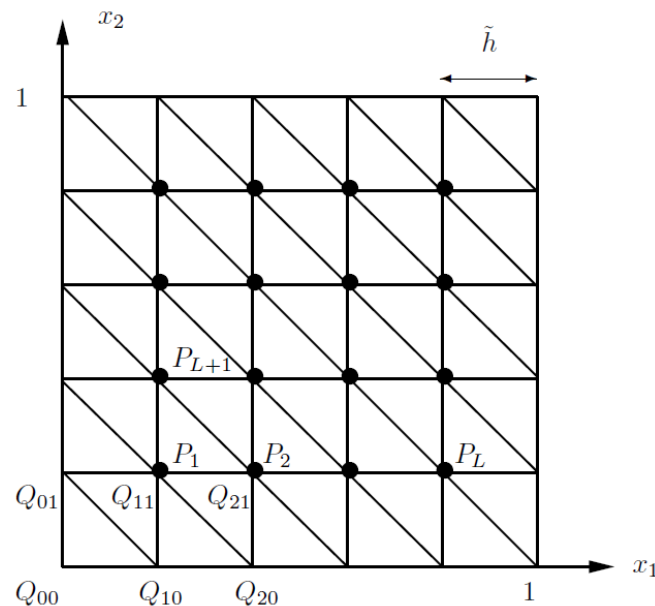


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour $L = 4$.

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Cela revient à chercher $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ tels que pour tout $j=1$ à N

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \varepsilon \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j(x) dx \\ + \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \left(\vec{c}(x, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx, \end{aligned}$$

On obtient la discrétisation spatiale:

$$M \dot{\vec{u}} + A \vec{u} = \vec{f} \text{ avec } M = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$$

$$\text{et } A_{ji} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV + \int_{\Omega} \left(\vec{c}(x, t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i \right) \varphi_j dV$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Carré unité avec $L = 4$

Matrice de masse M , $M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$ est nona-diagonale.

Sa demi-largeur de bande est 4.

$$M = \frac{\tilde{h}^2}{12} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} & & \\ \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & \\ & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} \\ & & \tilde{C}^T & \tilde{B} \end{bmatrix},$$

où nous avons noté

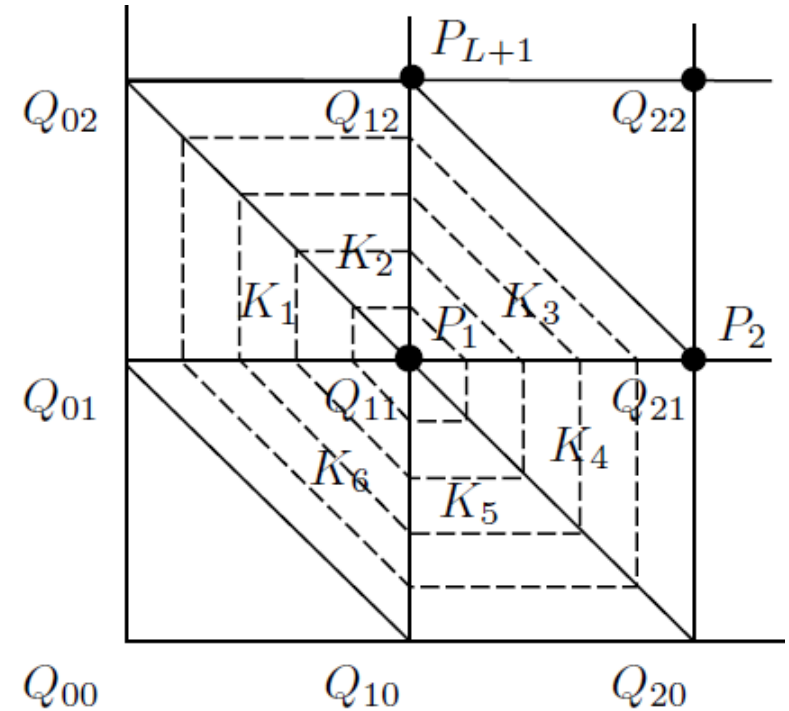
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 6 & 1 & \\ & 1 & 6 & 1 \\ & & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Exo 6b : dans le pb de convection-diffusion 2D, montrer que les termes diagonaux A_{ii} valent 4ε si la vitesse $c(x)$ est donnée par:

$$\vec{c}(x,t) = c_o(t) \vec{u}_y$$

$$A_{ji} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV + \int_{\Omega} (\vec{c}(x,t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i) \varphi_j dV$$



Bonnes relâches de Toussaint

Mercredi 30 Octobre: propé1 de 15h15 à 17h (aucun document), présence obligatoire (examen)
NB: 1/3 temps supplémentaire pour 4 étudiants

Mercredi 6 Novembre : correction du propé1