

Théorie et Pratique des éléments finis

MX-BA5

3H par semaine, 3 crédits

Moodle: MSE-369

contrôle pendant le semestre (2 propés)

Jean-marie.drezet@epfl.ch

Assistante: Noémie Jeannin <noemie.jeannin@epfl.ch>

Introduction à la méthode des EF

Prérequis

- Analytical and numerical differentiation & integration
- basic linear algebra
- solution of differential equations
- milieux continus

Références

- **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J.Z. Zhu, 2005, Elsevier, 752 pages.
- **The Finite Element Method**, G. R. Liu and S. S. Quek, 2013, Elsevier
- **Numerical Methods in Engineering with Python**, Jaan Kiusalaas, 2011, Cambridge University Press
- **Introduction à l'analyse numérique**, J. Rappaz et M. Picasso, 2017, PPUR.
- **Traité des matériaux vol. 10, Modélisation numérique en science et genie des matériaux**, M. Rappaz, M. Bellet et M. Deville, 1998, PPUR.

Introduction à la méthode des EF

Equation différentielle ordinaire: l'inconnue est une fonction d'une seule variable (ODE = ordinary differential equations)

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= 3u(t) - 3t && \text{si } t > 0, \\ u(0) &= \alpha; \end{aligned}$$

Equation aux dérivées partielles (EDP): l'inconnue est une fonction de plusieurs variables (PDE = partial differential equations), exemple pour $T(x,y,z,t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0$$

Il y a alors dépendance en temps et en espace de la solution.

La méthode des éléments finis (EF) donne une **approximation numérique de la solution** des EDP en des temps donnés (schéma temporel) et des positions données (schéma spatial).

Introduction à la méthode des EF

Référence: livre Introduction à l'analyse numérique, J. Rappaz et M. Picasso, 2017, PPUR. (chapitres 9 à 14).

1ère partie sur la théorie des éléments finis

équa diff. du 1er ordre, unicité, schémas d'Euler et stabilité

différences finies pour un problème 1D stationnaire

formulations fortes et faibles d'un pb elliptique stationnaire 1D

formulation de Galerkin et éléments finis 1D de degré 1

éléments finis 1D de degré 2, traitement des conditions aux limites

Problème elliptique et éléments finis triangulaires de degré 1 (maillage)

Problème parabolique 1D/2D transitoire et éléments finis de degré 1

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis 1D et 2D

Propé1: mercredi 6 Nov. 2 heures puis correction

Introduction à la méthode des EF

2nde partie : introduction à Abaqus, programme d'éléments finis

Intérêts des éléments finis, matrices élémentaires et globales
Fonctions de forme et élément maître, assemblage
intégration de Gauss-Legendre, maillage et choix des éléments

Résolution sur Abaqus (salle informatique MXF-014):

Unités, symétries et conditions aux limites
Problème parabolique 2D transitoire : thermique de moulage.
Problème de convection-diffusion : thermique de coulée continue.
Problème de statique: poutre élastique encastree
Problème élastoplastique: retour élastique sur poutre encastree
Dépendance au maillage: convergence et consistance
Contrainte en pointe de fissure (fracture mechanics).

Propé2: le 20 décembre 2 heures par groupe de 2

Introduction à la méthode des EF

Cours 1

Equations différentielles ordinaires, existence et unicité, schémas d'Euler et stabilité

Différences finies pour un problème 1D stationnaire

Exos 1 et 2.

Introduction à la méthode des EF

Equa diff. du 1er ordre, unicité, schémas d'Euler et stabilité: chapitre 9

Soit une fonction f de 2 variables:

x = variable d'espace

t = variable temporelle.

$$f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$$

Pb dit de Cauchy: trouver $u(t)$ continuellement dérivable telle que :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(u(t), t) & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \dot{u}(t) &= 3u(t) - 3t & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= \alpha; \end{aligned}$$

Introduction à la méthode des EF

Existence et unicité

Il n'y a pas toujours unicité de la solution.

Ex: $\dot{u}(t) = \sqrt[3]{u(t)}$ si $t > 0$,
 $u(0) = 0$;

$$\text{si } u \geq 0, \text{ si } u^{-1/3} = 1, \frac{3}{2} \frac{d}{dt}(u^{2/3}) = 1, \frac{d}{dt}(u^{2/3}) = \frac{2}{3}$$

$$u^{2/3} = \frac{2}{3}t \text{ puisque } u(0)=0 \text{ et } u = \left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{8}{27}}t^3$$

Il y a 3 solutions: $u(t) = 0$ et $u(t) = \pm \sqrt{8t^3/27}$,

La solution n'est pas tjs définie sur $[0, \infty[$ si $u \geq 0$, si $u^{-3} = 1$, $-\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u^{-2}) = 1$, $\frac{d}{dt}(u^{-2}) = -2$

Ex: $\dot{u}(t) = u^3(t)$, $t > 0$,
 $u(0) = 1$;

$$u^{-2} = \frac{1}{u^2} = -2t + 1 \text{ car } u(0)=1 \text{ et } u = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} \text{ pour } t < 1/2$$

La solution existe sur $[0, 1/2[$ et vaut: $u(t) = 1/\sqrt{1-2t}$

L'existence et l'unicité de solution du pb de Cauchy est délicate.

Introduction à la méthode des EF

Existence et unicité

Théorème: si la dérivée partielle en x de f est bornée pour tout $t > 0$, il y a une solution unique globale (i.e. définie pour tout $t > 0$).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ex:
$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u^3(t) + e^{-t^2/2}, & t > 0, \\ u(0) &= 1, \end{aligned}$$

Ici, $f(x, t)$ vaut:
$$f(x, t) = -x^3 + e^{-t^2/2}$$

La dérivée partielle en x est bornée pour tout $t > 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -3x^2 \leq 0.$$

Il y a une solution unique et globale.

Mais pas de solution explicite. Intégration numérique.

Introduction à la méthode des EF

Schéma d'Euler progressif

Pb de Cauchy:

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= f(u(t), t) && \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0,\end{aligned}$$

Schéma d'Euler progressif: on approxime la dérivée au temps t_n

Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$, des points de $\mathbb{R}^+$ et supposons connue une approximation u^n de u en $t = t_n$. Nous notons dans la suite $u^n \simeq u(t_n)$. Un schéma numérique à un pas consiste à calculer u^{n+1} , approximation de u en $t = t_{n+1}$, à partir de u^n . Par exemple, le ***schéma d'Euler progressif*** est obtenu en s'inspirant de la première équation de (9.1) et s'écrit :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n} = f(u^n, t_n),$$

ou, de façon équivalente :

$$u^{n+1} = u^n + (t_{n+1} - t_n)f(u^n, t_n). \quad (9.5)$$

Introduction à la méthode des EF

Schéma d'Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif est dit explicite:

$$u^{n+1} = u^n + (t_{n+1} - t_n)f(u^n, t_n).$$

Il est facile à implémenter numériquement MAIS il est **conditionnellement stable**:

Considérons le cas où $f(x, t) = -\beta x$, où β est un nombre réel positif donné.
Le problème (9.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\beta u(t), & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{9.9}$$

La solution tend vers 0 en l'infini: $u(t) = e^{-\beta t} u_0$

Introduction à la méthode des EF

Schéma d'Euler progressif

On discrétise l'axe $0t$ en posant $t_n = nh$ avec $h (= \Delta t, \text{ pas de temps}) > 0$.

Le schéma d'Euler progressif (9.7) devient

$$u^{n+1} = (1 - \beta h)u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

et par suite

$$u^n = (1 - \beta h)^n u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.11)$$

u_n est une suite géométrique de raison $(1 - \beta h)$ avec $\beta > 0$ et $h > 0$.

Si $(1 - \beta h) < -1$, u_n diverge à l'infini en alternant de signe:

le schéma progressif est dit instable (u_n ne tend pas vers la solution u)

Pour assurer que u_n tende vers 0. en l'infini, il faut imposer $(1 - \beta h) \geq -1$

i.e. **$h = \Delta t \leq 2 / \beta$** : c'est la condition de stabilité, le pas de temps, h , est limité.

Introduction à la méthode des EF

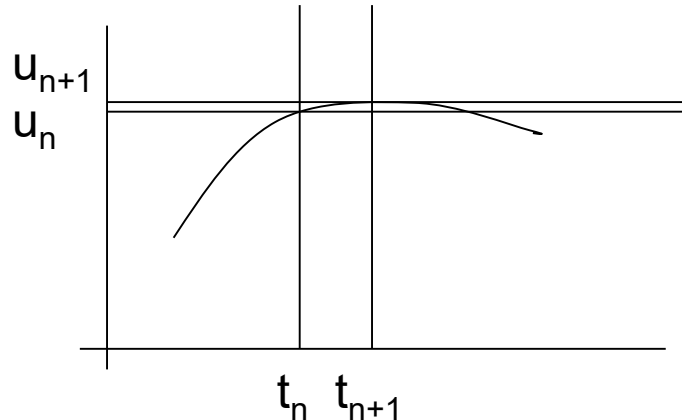
Schéma d'Euler rétrograde

Pb de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(u(t), t) & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

Schéma d'Euler rétrograde: on approxime la dérivée au temps t_{n+1}

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_n} = f(u^{n+1}, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$u^0 = u_0.$$



Introduction à la méthode des EF

Schéma d'Euler rétrograde

Le schéma d'Euler rétrograde est dit implicite.

En effet, nous avons avec le pas de temps : $h_n = t_{n+1} - t_n$,

$$u^{n+1} - h_n f(u^{n+1}, t_{n+1}) = u^n.$$

Si nous voulons calculer u^{n+1} , nous définissons la fonction

$$g(x) = x - h_n f(x, t_{n+1}) - u^n$$

et nous cherchons un zéro de $g(x)$ en prenant par exemple une méthode de Newton (sect. 8.3). Ainsi nous pouvons poser $x_0 = u^n$ et $x_{m+1} = x_m - g(x_m)/g'(x_m)$, $m = 0, 1, \dots$. Puisque $g'(x) = 1 - h_n \partial f(x, t_{n+1})/\partial x$, nous obtenons donc dans ce cas le schéma :

$$x_0 = u^n,$$
$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m - h_n f(x_m, t_{n+1}) - u^n}{1 - h_n \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t_{n+1})}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = u^{n+1}$$

Introduction à la méthode des EF

Schéma d'Euler rétrograde

Il est plus fastidieux à implémenter numériquement MAIS il est **inconditionnellement stable**:

Considérons le cas où $f(x, t) = -\beta x$, où β est un nombre réel positif donné.

Le problème (9.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\beta u(t), & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{9.9}$$

La solution tend vers 0 en l'infini: $u(t) = e^{-\beta t} u_0$

Le schéma d'Euler rétrograde (9.8) devient dans le cadre de notre exemple :

$$(1 + \beta h)u^{n+1} = u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{9.13}$$

et par suite :

$$u^n = \left(\frac{1}{1 + \beta h} \right)^n u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \beta \geq 0. \text{ donc } 1/(1+\beta h) \leq 1$$

Dans ce cas, nous voyons que pour tout $h > 0$, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0;$$

le schéma d'Euler rétrograde est donc toujours stable ; h n'a pas à être limité !

Introduction à la méthode des EF

«précision» des schémas d'Euler dans le cas d'une solution globale unique

Soit $T > 0$ le temps jusqu'où nous voulons intégrer (9.1), soit N un entier positif, soit $h = T/N$ le pas de temps et soit $t_n = nh$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Alors il existe une constante C (indépendante de N mais qui peut dépendre de T) telle que pour tout N nous avons :

$$|u(T) - u^N| \leq \frac{C}{N} = \frac{C}{T}h, \quad (9.22)$$

où les approximations $u^0, u^1, \dots, u^N$ sont données par le schéma d'Euler progressif (9.7) ou le schéma d'Euler rétrograde (9.8). En particulier nous avons $\lim_{N \rightarrow \infty} |u(T) - u^N| = 0$.

Considérons l'estimation d'erreur entre $u(T)$ et u^N , donnée de façon générale par la relation (9.22). Puisque $1/N = h/T = O(h)$ lorsque h tend vers zéro (il faut lire $1/N$ est d'ordre h lorsque h tend vers zéro), $|u(T) - u^N| = O(h)$. Nous dirons que les schémas d'Euler sont d'ordre 1 en h . En pratique, l'erreur commise au temps $t = T$ sera, en principe, divisée par deux chaque fois que le pas de temps h est divisé par deux.

Introduction à la méthode des EF

Autres méthodes ...

Formule des trapèzes (méthode implicite ou explicite ?):

$$u^{n+1} - u^n = \frac{1}{2}h_n \left(f(u^n, t_n) + f(u^{n+1}, t_{n+1}) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Runge-Kutta classique (méthode implicite ou explicite ?):

$$p_1 = f(u^n, t_n),$$

$$p_2 = f\left(u^n + \frac{h_n}{2}p_1, t_n + \frac{h_n}{2}\right),$$

$$p_3 = f\left(u^n + \frac{h_n}{2}p_2, t_n + \frac{h_n}{2}\right),$$

$$p_4 = f(u^n + h_n p_3, t_{n+1}),$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{h_n}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4).$$

C'est une méthode d'ordre 4: $|u(T) - u^N| \leq Ch^4 = C \frac{T^4}{N^4},$

Introduction à la méthode des EF

Systèmes différentiels vectoriels du premier ordre

Soit M un entier positif et soit $\vec{f} : (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{f}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^M$ une fonction vectorielle donnée, supposée continue. Si $\vec{u}_0$ est un vecteur à M composantes données, on pose le problème de trouver une fonction à valeurs vectorielles

$$\vec{u} : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^M$$

telle que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}(t) &= \vec{f}(\vec{u}(t), t), & t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Composante par composante soit M équations différentielles ordinaires.

Introduction à la méthode des EF

Equation différentielle du second ordre

Considérons dans un premier temps le cas d'une fonction à 3 variables

$$f : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, y, t) \in \mathbb{R}$$

que nous supposons continue, et soit deux nombres donnés u_0 et v_0 . On pose le problème de trouver une fonction

$$u : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow u(t) \in \mathbb{R},$$

deux fois continûment dérivable, telle que

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= f(u(t), \dot{u}(t), t), & t > 0, \\ u(0) &= u_0, & \dot{u}(0) = v_0, \end{aligned} \tag{9.34}$$

où nous avons noté $\ddot{u}(t) = d^2u(t)/dt^2$. Le problème (9.34) est appelé ***problème différentiel du deuxième ordre***; deux conditions initiales sont fixées qui, en dynamique par exemple, correspondent le plus souvent à l'état initial et à la vitesse initiale lorsque t est le temps.

Introduction à la méthode des EF

Equation différentielle du second ordre

Pour résoudre numériquement le problème (9.34), nous pouvons par exemple introduire une nouvelle inconnue $v(t) = \dot{u}(t)$ et ainsi remplacer (9.34) par un système du premier ordre pour les inconnues $u(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= f(u(t), v(t), t), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{et} \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Le problème (9.35) est un système différentiel du premier ordre de 2 équations à 2 inconnues.

Ex: force de freinage lors d'une chute dans l'air

en $t = 0$, $z = 0$ et $v = 0$ ($\vec{g} = g\vec{e}_z$)

pour $t \geq 0$, $v = \dot{z}$ et $m\dot{v} = m\ddot{z} = -kv + g$

Introduction à la méthode des EF

Résumé

Pour résoudre le pb de Cauchy, $\dot{u}(t) = f(u(t), t)$ si $t > 0$,
 $u(0) = u_0$,

on a recours:

- au schéma progressif qui est explicite mais conditionnellement stable
- au schéma rétrograde qui est implicite et inconditionnellement stable
- ou à des schémas d'ordre supérieur (formule des trapèzes ou Runge Kutta)

Ces schémas :

- ne donnent une approximation qu'en certains temps t_n
- sont d'autant plus précis que le pas de temps est petit
- et seront utilisés pour la résolution en temps des problèmes transitoires résolus par les éléments finis en espace.

Abaqus utilise l'intégration implicite en temps car inconditionnellement stable.

Introduction à la méthode des EF

Exo1: on considère l'équation différentielle suivante:

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -u^3(t) + e^{-t^2/2}, & t > 0, \\ u(0) &= 1,\end{aligned}$$

- 1- Ecrire le schema de Euler explicite et calculer dans Excel $u(t=10)$ avec 4 chiffres derrière la virgule pour $\Delta t = 1.$ et $\Delta t = 0.1$
- 2- évaluer dans excel le pas de temps maximum qui donne une solution convergente
- 3- écrire le schéma de Euler implicite sans le résoudre
- 4- écrire le schéma mixte (méthode des trapèzes) sans le résoudre

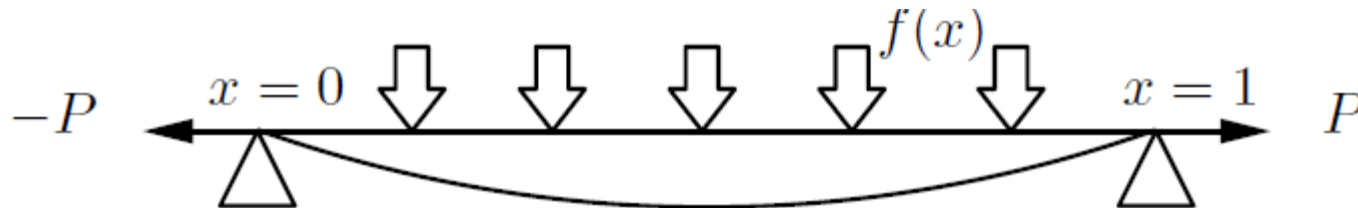
Introduction à la méthode des EF

Différences finies et éléments finis pour un problème 1D stationnaire (chap. 10 de Introduction à l'Analyse Numérique)

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Ex: fléchissement d'une corde étirée selon son axe par une force P et fixée en $x = 0$ et 1 . avec appuis simple. $F(x)$ est la densité linéaire de charge, $c(x) = P/EI(x)$ avec E module de Young et $I(x)$ moment principal d'inertie de la section de la poutre en x



Introduction à la méthode des EF

Remarques:

La longueur de la corde est normalisée à 1. On cherche donc la solution sur $[0,1]$.

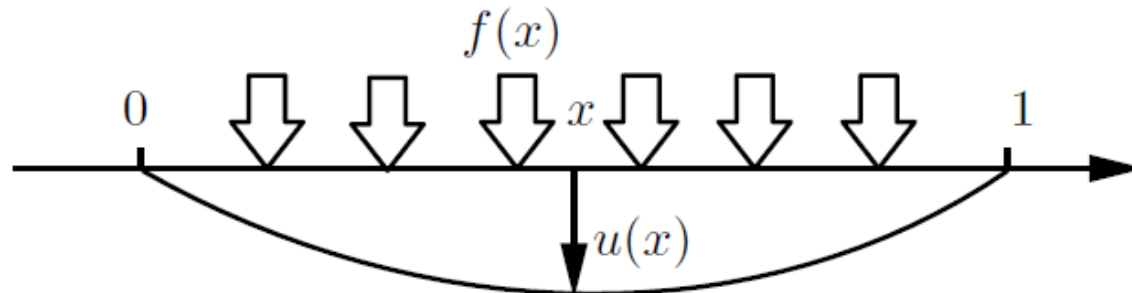
Si la corde est définie entre a et b , on fait le changement de variable $x'=(x-a)/(b-a)$ et ainsi x' varie de 0 à 1.

Le pb est du second ordre et requiert deux conditions, appelées conditions aux limites.

Théorème: si $c(x) \geq 0$ sur $[0,1]$, il y a **existence et unicité** de la solution.

Si $c(x) = 0$, le pb s'appelle pb de Poisson: $-u''(x) = f(x)$.

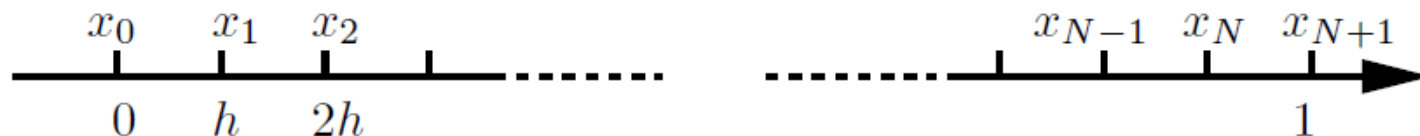
$u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde tendue entre 0 et 1, soumise à une tension unité et à une densité de charge verticale $f(x)$.



Introduction à la méthode des EF

Méthode des différences finies pour le cas où $u(x)$ ne s'écrit pas sous forme analytique.

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N + 1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



h est le pas d'espace: $h < 1.0$

Si u est quatre fois continûment dérivable, alors

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

où $O(h^2)$ désigne un reste qui, lorsque h tend vers zéro, reste borné par une constante multipliée par h^2 .

Notons u_i l'approximation de $u(x_i)$. Nous obtenons:

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j) \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Introduction à la méthode des EF

Le schéma est dit pb approché ou pb discret par opposition au pb continu dont $u(x)$ est solution. C'est un schéma d'approximation en différences finies.

Le pb discret consiste à chercher un nbre fini, N , de valeurs u_j , approximations de $u(x_j)$.

Si $\vec{u}$ est le N -vecteur colonne de composantes $u_1, u_2, \dots, u_N$, si $\vec{f}$ est le N -vecteur de composantes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ et si A est la $N \times N$ matrice tridiagonale définie par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

où $c_i = c(x_i)$, alors le problème approché (10.3) (10.4) est clairement équivalent à chercher $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \quad (10.6)$$

Introduction à la méthode des EF

Rappel: si $c(x) \geq 0$ sur $[0,1]$, il y a existence et unicité de la solution.

Si $c(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, on peut montrer que A est une matrice symétrique définie positive. Elle est donc régulière et soit $\vec{u}$ la solution de (10.6) que l'on peut obtenir après avoir fait une décomposition de Cholesky de la matrice A

Rappel: matrice symétrique définie positive

Définition 5.1 Une $N \times N$ matrice A est dite symétrique définie positive si :

- i) $A = A^T$ (A est symétrique),
- ii) $\vec{y}^T A \vec{y} \geq 0$ pour tout N -vecteur $\vec{y}$,
- iii) $\vec{y}^T A \vec{y} = 0$ si et seulement si $\vec{y} = 0$.

NB: Toutes les valeurs propres de A sont réelles positives.

lorsqu'on veut résoudre un système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

où la matrice A est symétrique définie positive, on fait une décomposition de Cholesky $A = LL^T$ et on résout successivement

$$L\vec{y} = \vec{b}, \quad \text{puis} \quad L^T \vec{x} = \vec{y}. \quad \text{NB: } L \text{ est une matrice inférieure (lower)}$$

Introduction à la méthode des EF

L'erreur entre approximation et solution est d'ordre 2 en pas d'espace $h = 1/(N+1)$: donc plus h est petit, meilleure est l'approximation. Mais cela se fait au détriment du temps de calcul (optimum entre temps de calcul et qualité de l'approximation).

Théorème 10.1 *On suppose que $c(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, 1]$ et que la solution u de (10.1) est quatre fois continûment dérivable. Alors il existe une constante C indépendante de N (et donc de h) telle que*

$$\max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| \leq Ch^2. \quad (10.7)$$

On constate donc que si $(u_j)_{1 \leq j \leq N}$ est solution de (10.3) et si u est solution de (10.1), on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| = 0. \quad (10.8)$$

De plus, l'erreur est, en principe, quatre fois plus petite chaque fois qu'on double le nombre de points de discrétisation.

Exo2:

Introduction à la méthode des EF

1- Etablir la relation $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

2- Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), fixée en $x=0$ et 1 et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

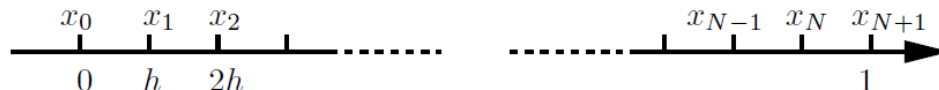
3- En prenant $N = 3$, calculer une approximation de la solution en $x = 0.25, 0.5$ et 0.75 à l'aide d'une décomposition de Cholesky.

Indication: calculer le produit matriciel:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Seconde indication: comparer votre résultat avec LA SOLUTION ANALYTIQUE

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N+1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



Introduction à la méthode des EF

Exo2b: condition sur la dérivée de $u(x)$ en $x = 0$, flux imposé

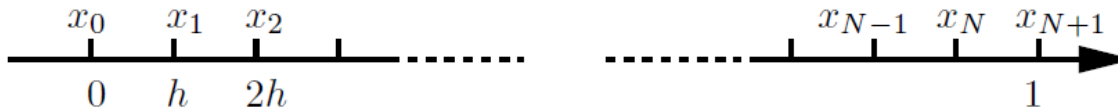
Établir le schéma aux différences finies dans lequel $u(x)$ est le déplacement vertical d'une corde non tendue ($P=0$ donc $c(x) = P/EI(x) = 0$), telle **que $du/dx = a$ en $x = 0$ (flux imposé)** et $u(1)=0$ et soumise à une densité de charge verticale $f(x) = -x$.

On notera u_0 l'approximation de u en $x = 0$. et on utilisera le $(N+1)$ vecteur $\vec{u} =$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution analytique.

Soit N un entier positif; on pose $h = 1/(N + 1)$ et on note $x_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$, les points de discrétisation (fig. 10.3).



Introduction à la méthode des EF

Cours 2 : formulations fortes, faibles et de
Galerkin