Corrigé du propé1 du 30 Octobre 2024

Soient c(x) et f(x) deux fonctions scalaires continues sur l'intervalle [0,1] et ε un réel positif, on cherche une solution approchée de u(x), solution sur l'intervalle [0,1] de :

$$-\varepsilon u''(x)+ c(x)u'(x) = f(x) \quad \text{avec} \quad u(x=0)= u(x=1) =0 \quad \text{(pb. 1)}$$

Il s'agit d'un problème de convection-diffusion stationnaire dans lequel le premier terme représente la diffusion et le second terme le terme de transport, c(x) étant la vitesse de transport. Le but de l'exercice est de trouver la solution approchée par éléments finis avec un maillage à pas défini par une progression géométrique.

1. Donner la formulation faible du problème ci-dessus en choisissant une fonction test v(x) à dérivée continue par morceaux et telle que v(0)= v(1)=0.

On multiplie l'équation que vérifie u(x) par une fonction v(x), on intègre de 0 à 1 et on utilise une intégration par partie :

$$\int_0^1 -\varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} v(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx,$$

$$-\varepsilon\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \varepsilon\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$\text{avec } v(0) = v(1) = 0, \text{ il vient } \left[u'(x)v(x)\right]_0^1 = 0$$

$$\int_0^1 \varepsilon u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \text{ (eq.1) ceci pour toute fonction } v(x)$$

2. Soient N un entier positif et q un réel positif, on établit une discrétisation du segment [0,1] à l'aide d'une suite géométrique de raison q en posant :

$$x_{j+1} - x_j = h_j = q^j h_0 \text{ pour } j = 0,1, \ldots N \text{ avec } x_0 = 0. \text{ On a donc } x_i = \sum_{j=1}^{j=i-1} h_j$$

Calculez h_0 en fonction de q et N. On rappelle la somme des N premiers termes d'une suite géométrique : $\sum_{j=0}^{j=N} q^j = \frac{1- q^{N+1}}{1-q}$.

Le segment [0,1] a donc pour longueur la somme des h_j, ceci permet de déterminer h_0 :

$$x_{N+1} = \sum_{j=0}^{j=N} h_j = 1.0 = \sum_{j=0}^{j=N} h_0 q^j = h_0 \frac{1- q^{N+1}}{1-q} \quad \text{soit} \quad h_0 = \frac{1- q}{1-q^{N+1}}$$

3. On définit alors les N fonctions d'interpolation linéaire (fonction chapeau) φ_i centrée en x_i. Faire un graphe de la distribution des x_i dans le cas q < 1 et dessinez une fonction φ_i. Quelle est le support (ou l'adhérence) d'une telle fonction φ_i ?

Chaque fonction φ_i est non nulle sur $[x_{i-1},x_{i+1}]$: elle a donc une adhérence valant $h_{i-1} + h_i$.

4. On appelle V_N l'espace vectoriel de dimension N des fonctions engendrées par les combinaisons linéaires des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N$. Ecrire l'approximation de Galerkin dans V_N du problème ci-dessus.

L'approximation de Galerkin consiste à trouver u dans V_N, notée u_N, telle que l'équation (1) soit valable pour toute fonction v(x) de V_N que nous notons v_N :

$$\varepsilon\int_0^1 u'_N(x)v_N'(x)dx + \int_0^1 c(x)u_N'(x)v_N(x)dx = \int_0^1 f(x)v_N(x)dx, \text{ (eq.2) ceci pour toute fonction } v_N(x) \text{ de } V_N.$$

5. On note u_i l'approximation de u(x) en x_i pour i = 1, …, N. Montrer que le problème revient à résoudre un système linéaire de la forme $A\vec{u} = \vec{f}$, où A est une matrice carrée de taille NxN, $\vec{u}$ un vecteur de N composantes $u_1, \dots u_N$ et $\vec{f}$ le vecteur second membre de taille N. Donner l'expression des composantes de la matrice A et de celles du vecteur $\vec{f}$ en fonction des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\varphi_i'(x)$ et des données du problème.

On cherche u_N dans V_N donc $u_N(x)$ s'écrit à l'aide des u_i :

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

Il faut et il suffit que pour toutes les fonctions φ_j (j = 1 à N), nous ayons :

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \int_0^1 \Big(\varepsilon \varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i'(x)\varphi_j(x)\Big)dx = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \qquad j = 1, \dots, N.$$

Cela revient à écrire le système linéaire sous la forme $A\vec{u} = \vec{f}$ ou $\vec{u}$ et $\vec{f}$ sont les N vecteurs de compostantes $u_1, \dots u_N$, $\vec{f}$ le second membre et A une matrice carrée de taille NxN.

$$A_{ji} = \int_0^1 \Big(\varepsilon \varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i'(x)\varphi_j(x)\Big)dx, \qquad i, j = 1, \dots, N,$$

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \qquad j = 1, \dots, N.$$

On remarque que A n'est pas symétrique.

6. Quelle est la largeur de bande de la matrice A ? Justifiez votre réponse.
A n'est pas symétrique et sa largeur de bande est 3 car une fonction φ_j a une adhérence commune avec elle-même, φ_{j+1} et φ_{j-1}.

7. Par la suite, on pose $c(x)=c_0$, une constante. Calculez A_{ii} en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

$$A_{ii} = \int_0^1 \left(\varepsilon\left(\varphi_i'\right)^2 + c0\varphi_i'\varphi_i\right)dx = \varepsilon\left(\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{h_i}{h_i^2}\right) + c_0\frac{1}{h_{i-1}}\int_{h_{i-1}}\varphi_i dx - c_0\frac{1}{h_i}\int_{h_i}\varphi_i dx$$

$$A_{ii} = \varepsilon\left(\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{h_i}{h_i^2}\right) + c_0\frac{h_{i-1}}{2h_{i-1}} - c_0\frac{h_i}{2h_i} = \varepsilon\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) = \varepsilon\left(\frac{1}{h_0 q^{i-1}} + \frac{1}{h_0 q^i}\right) = \frac{\varepsilon}{h_0 q^{i-1}}\left(1 + \frac{1}{q}\right)$$

8. Calculer $A_{i,i+1}$ en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \left(\varepsilon\varphi_i'\varphi_{i+1}' + c_0\varphi_{i+1}'\varphi_i\right)dx = \varepsilon\int_{h_i}\left(\frac{1}{h_i}\right)\left(\frac{-1}{h_i}\right)dx + c_0\frac{1}{h_i}\int_{h_i}\varphi_i dx = -\varepsilon\left(\frac{1}{h_i}\right) + \frac{c_0}{2} = \frac{-\varepsilon}{h_0 q^i} + \frac{c_0}{2}$$

9. Calculer $A_{i,i-1}$ en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

$$A_{i,i-1} = \int_0^1 \left(\varepsilon\varphi_i'\varphi_{i-1}' + c_0\varphi_{i-1}'\varphi_i\right)dx = \varepsilon\int_{h_{i-1}}\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right)\left(\frac{-1}{h_{i-1}}\right)dx + c_0\left(\frac{-1}{h_i}\right)\int_{h_{i-1}}\varphi_i dx = -\varepsilon\left(\frac{1}{h_{i-1}}\right) - \frac{c_0}{2} = -\frac{\varepsilon}{h_0 q^{i-1}} - \frac{c_0}{2}$$

10. Calculez la composante fj du vecteur second membre $\vec{f}$ en prenant $f(x)= f_0(1+x)$ à l'aide de la formule composite des trapèzes données ci-dessous.

Soit l(x) une fonction intégrable sur [0,1], alors $\int_0^1 l(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\left(l(x_i)+l(x_{i+1})\right)$, somme des aires hachurées ci-dessous.

On pose $l(x)=f_0(1+x)\varphi_j(x)$ qui est non-nulle en x_j

Quand $i = j-1$, $l(x_i)+l(x_{i+1}) = 0 + l(x_j)=f_o(1+x_j)$ et quand $i = j$, $l(x_i)+l(x_{i+1}) = l(x_j) + 0 = f_o(1+x_j)$.

Ainsi $f_j = \int_0^1 \left(f_0(1+x)\varphi_j\right)dx = f_0\left(\frac{x_j-x_{j-1}}{2}\right)(1+x_j) + f_0\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2}\right)(1+x_j)= f_0\left(\frac{h_{j-1}}{2}\right)(1+x_j) + f_0\left(\frac{h_j}{2}\right)(1+x_j)$

$f_j= f_0\left(\frac{h_0}{2}\right)(1+x_j)q^{j-1}(1+q)$

11. Dans le cas où $c(x)=c_0 < 0$, préconisez-vous de prendre $q < 1$ ou $q > 1$? Justifiez votre réponse.

La vitesse est négative donc le fluide circule vers la gauche. On prendra donc $q > 1$ car **la couche limite** va se former proche de $x = 0$. Ainsi le maillage 1D sera plus fin du côté $x = 0$., ce qui permettra de bien « capturer » la couche limite.

12. Dans le cas où $c(x)=c_0$ et $f(x)= f_0$, déterminer la solution analytique du problème 1.

$-\varepsilon u''(x)+ c_0u'(x) = f_0$ avec $u(x=0)= u(x=1) =0$. On pose v=u' pour obtenir : $-\varepsilon v'(x)+ c_0v(x) = f_0$

On cherche une solution particulière sous la forme d'une constante: cette constante est f_0/c_0

Sol. de l'équation homogène: $-\varepsilon v'(x)+ c_0v(x) = 0$ est $v(x)=A\exp(c_0x/\varepsilon)$

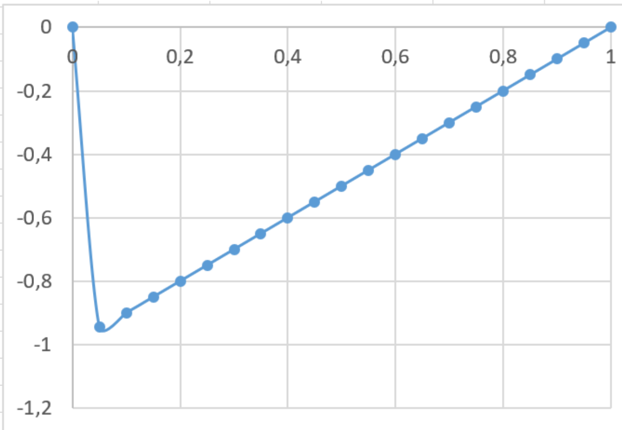
Ainsi $v(x)=A\exp(c_0x/\varepsilon) + f_0/c_0$ et $u(x)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\exp(c_0x/\varepsilon) + f_0x / c_0+ B$. Or $u(0)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A + B = 0$

et $u(1)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\exp(c_0/\varepsilon) + f_0 / c_0+ B = 0$ d'ou $A = \left(\frac{f_0}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\exp(c_0/\varepsilon)-1}\right)$ et $B = -\left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left(\frac{1}{\exp(c_0/\varepsilon)-1}\right)$

$$u(x) =\left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left(\frac{1}{\exp(c_0/\varepsilon)-1}\right)\exp(c_0x/\varepsilon) + f_0x / c_0- \left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left(\frac{1}{\exp(c_0/\varepsilon)-1}\right) = \left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left[x-\left(\frac{1-\exp(c_0x/\varepsilon)}{1-\exp(c_0/\varepsilon)}\right)\right]$$

x	u	delta	-0,01
0	0		
0,05	-0,9432621		
0,1	-0,8999546		
0,15	-0,8499997		
0,2	-0,8		
0,25	-0,75		
0,3	-0,7		
0,35	-0,65		
0,4	-0,6		
0,45	-0,55		
0,5	-0,5		
0,55	-0,45		
0,6	-0,4		
0,65	-0,35		
0,7	-0,3		
0,75	-0,25		
0,8	-0,2		
0,85	-0,15		
0,9	-0,1		
0,95	-0,05		
1	0		

$\left(x - \frac{1-e^{x/\delta}}{1-e^{1/\delta}}\right)$ avec $\delta = \varepsilon/c_0$ [m]



Boni (bonus au pluriel …)

13. Dans le cas où $c(x)=c_0$ et $f(x)= f_0(1+x)$, déterminer la solution analytique du problème 1.

$-\varepsilon u''(x)+ c_0u'(x) = f_0(1+x)$ avec $u(x=0)= u(x=1) =0$

On pose $v=u'$ pour obtenir: $-\varepsilon v'(x)+ c_0v(x) = f_0(1+x)$

On cherche une solution particulière sous la forme $ax+b$: $-\varepsilon a+ c_0(ax+b) = f_0(1+x)$ qui donne:

$-\varepsilon a+bc_0= f_0$ et $ac_0= f_0$, soit $a = f_0/c_0$ et $b =(f_0 +\varepsilon f_0/c_0) / c_0=(1+ \varepsilon / c_0)f_0/c_0$

Sol. de l'équation homogène: $-\varepsilon v'(x)+ c_0v(x) = 0$ est $v(x)=A\exp(c_0x/\varepsilon)$

Ainsi $v(x)=A\exp(c_0x/\varepsilon) + xf_0/c_0 + (1+\varepsilon / c_0)f_0/c_0$ et $u(x)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\exp(c_0x/\varepsilon) + \left(\frac{x^2}{2}\right)f_0 / c_0 + (1+\varepsilon/c_0)xf_0/c_0 + B$

$u(0)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A + B = 0.$ et $u(1)=\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\exp(c_0/\varepsilon) + \left(\frac{1}{2}\right)f_0 / c_0 + (1+\varepsilon/c_0)f_0/c_0 + B = 0.$

$\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\exp(c_0/\varepsilon) + \left(\frac{1}{2}\right)f_0 / c_0 + (1+\varepsilon/c_0)f_0/c_0 + -\left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A = 0.$, $f_0 / (2c_0) + (1+\varepsilon/c_0)f_0/c_0 = \left(\frac{\varepsilon}{c_0}\right)A\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)$

$A = \frac{f_0}{\varepsilon}(3/2+\varepsilon/c_0)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)$ et $B = -\left(\frac{f_0}{c_0}\right)(3/2+\varepsilon/c_0)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)$

$$u(x)=\left(\frac{f_0}{c_0}\right)(3/2+\varepsilon/c_0)\exp(c_0x/\varepsilon)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)f_0 / c_0 + (1+\varepsilon/c_0)xf_0/c_0 - \left(\frac{f_0}{c_0}\right)(3/2+\varepsilon/c_0)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)$$

$$u(x)=\left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left[(3/2+\varepsilon/c_0)\exp(c_0x/\varepsilon)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)+\left(\frac{x^2}{2}\right)+(1+\varepsilon/c_0)x - (3/2+\varepsilon/c_0)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)\right]$$

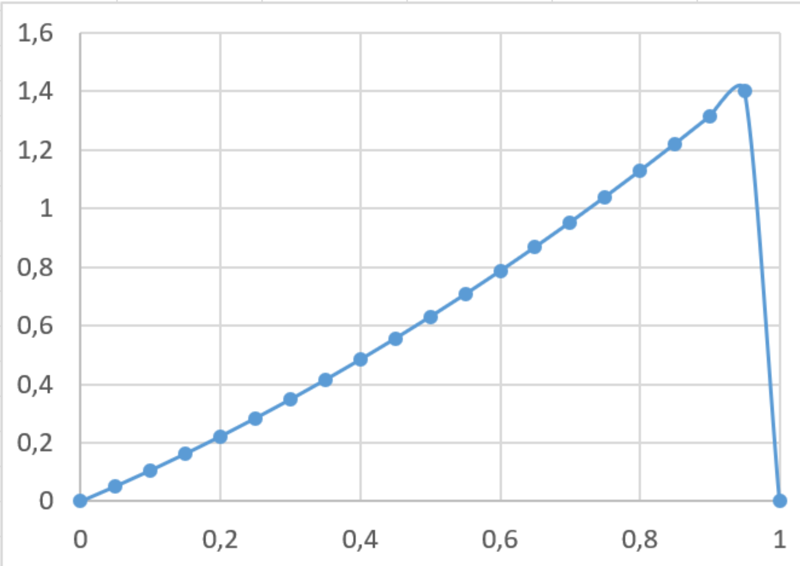
$$u(x)=\left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left[(3/2+\varepsilon/c_0)(\exp(c_0x/\varepsilon)-1)/\left(1-\exp(c_0/\varepsilon)\right)+\left(\frac{x^2}{2}\right)+(1+\varepsilon/c_0)x\right]$$

soit en posant $\delta = \varepsilon/c_0$ [m], $u(x)=\left(\frac{f_0}{c_0}\right)\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)+(1+\delta)x - (3/2+\delta)\left(\frac{1-\exp(x/\delta)}{1-\exp(1/\delta)}\right)\right]$

delta 0,01

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)+(1+\delta)x - (3/2+\delta)\left(\frac{1-\exp(x/\delta)}{1-\exp(1/\delta)}\right)\right]$$

x	u
0	0
0,05	0,05175
0,1	0,106
0,15	0,16275
0,2	0,222
0,25	0,28375
0,3	0,348
0,35	0,41475
0,4	0,484
0,45	0,55575
0,5	0,63
0,55	0,70675
0,6	0,786
0,65	0,86775
0,7	0,952
0,75	1,03875
0,8	1,128
0,85	1,21974954
0,9	1,31393145
0,95	1,4005757
1	0



14. Calculez la composante fj du vecteur second membre $\vec{f}$ en prenant f(x)= $f_0(1+x)$ à l'aide d'un calcul exact et comparez avec la valeur donnée par la formule des trapèzes.

$$f_j = \int_0^1 \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = \int_{h_{j-1}} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx + \int_{h_j} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx$$

$$\int_{h_{j-1}} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = f_0 \int_0^{h_{j-1}} (1+x_{j-1}+u)\left(\frac{u}{h_{j-1}}\right)du \quad \text{en posant } x = x_{j-1}+u$$

$$\int_{h_{j-1}} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = \left(\frac{f_0}{h_{j-1}}\right)\left[(1+x_{j-1})\left(\frac{h_{j-1}^2}{2}\right)+\left(\frac{h_{j-1}^3}{3}\right)\right] = f_0\left[(1+x_{j-1})\left(\frac{h_{j-1}}{2}\right)+\left(\frac{h_{j-1}^2}{3}\right)\right]$$

$$\int_{h_j} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = f_0 \int_0^{h_j} \left((1+x_j+v)\left(h_j-v\right)/h_j\right)dv \quad \text{en posant } x = x_j+v$$

$$\int_{h_j} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = \left(\frac{f_0}{h_j}\right)\int_0^{h_j}\left(h_j+x_jh_j+vh_j - v - vx_j - v^2\right)dv = \left(\frac{f_0}{h_j}\right)\left[(h_j+x_jh_j)h_j + \left(h_j-1-x_j\right)\left(\frac{h_j^2}{2}\right)-\left(\frac{h_j^3}{3}\right)\right]$$

$$\int_{h_j} \left(f_0(1+x)\varphi_i\right)dx = f_0\left[(h_j+x_jh_j)+\left(h_j-1-x_j\right)\left(\frac{h_j}{2}\right)-\left(\frac{h_j^2}{3}\right)\right]$$

$$f_j=f_0\left[(1+x_{j-1})\left(\frac{h_{j-1}}{2}\right)+\left(\frac{h_{j-1}^2}{3}\right)+h_j(1+x_j)+\left(h_j-1-x_j\right)\left(\frac{h_j}{2}\right)-\left(\frac{h_j^2}{3}\right)\right]$$

$$f_j=f_0\left[(h_{j-1}/2+h_{j-1}x_{j-1}/2)+\left(\frac{h_{j-1}^2}{3}\right)+(h_j+x_jh_j)+\left(-h_j/2-x_jh_j/2\right)+\left(\frac{h_j^2}{2}\right)-\left(\frac{h_j^2}{3}\right)\right]$$

$$f_j=\frac{f_0}{2}\left[h_{j-1}+h_{j-1}(x_j-h_{j-1})+h_j+h_j(x_{j+1}-h_j)+h_j^2+2\left(\frac{h_{j-1}^2}{3}\right)-2\left(\frac{h_j^2}{3}\right)\right]_j = \frac{f_0}{2}\left[h_{j-1}(1+x_j)+h_j(1+x_{j+1})+\frac{2}{3}h_{j-1}^2+\frac{1}{3}h_j^2\right]$$

La formule du trapèze qui donne $f_j=\frac{f_0}{2}\left(h_{j-1}(1+x_j)+h_j(1+x_{j+1})\right)$ laisse "tomber" les termes en h_j^2 et h_{j-1}^2.

NB : Dans le cas où $c(x)=c_0$ et $f(x)= f_0$, la forme générale du système linéaire $A\vec{u} = \vec{f}$ avec un pas d'espace constant à savoir en prenant q = 1 devient celle étudiée en cours :

Avec q = 1 (pas constant égal à h_0) , nous obtenons

$$A_{ii} = \frac{2\varepsilon}{h_0},\ A_{ii+1} = -\frac{\varepsilon}{h_0}+\frac{c_0}{2},\ A_{i-1,i} = -\frac{\varepsilon}{h_0}-\frac{c_0}{2} \quad \text{et} \quad f_j=h_0f_0 \quad \text{(cas traité en cours).}$$