

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Exo2a: Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions c et f continues sur l'intervalle $[0, 1]$, trouver une fonction u deux fois continûment dérivable sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Vérifiez les 3 formules suivantes pour les fonctions linéaires de degré 1 (chapeau) avec $h = 1/(N+1)$, $N > 0$

$$\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j).$$

Et écrire le système matriciel à résoudre sous la forme: $A\vec{u} = \vec{f}$.

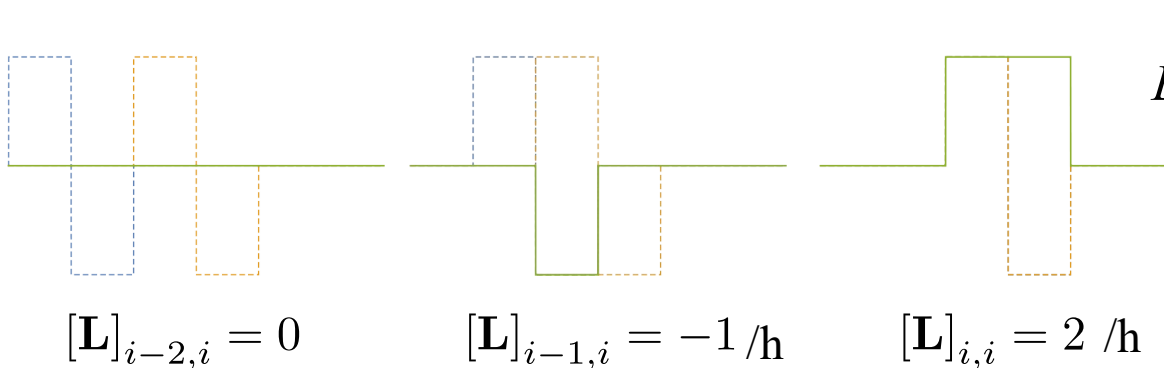
Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Corrigé exo2a: vérifier les 3 formules suivantes:

$$\text{Posons } L_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx = \begin{cases} 2/h & \text{si } i = j, \\ -1/h & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Avec un espacement constant entre chaque point x_i valant $h = \Delta x$, nous avons:

$\phi'_i = 1/h$ sur sa partie croissante, $\phi'_i = -1/h$ sur sa partie décroissante et ailleurs $\phi'_i = 0$.



$$L_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{-1}{h} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{h} \right)^2 dx = \int_{-h}^h \left(\frac{1}{h} \right)^2 dx = \frac{2}{h}$$

$$L_{i-1,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h} \frac{1}{h} dx = \frac{-1}{h}$$

$[\mathbf{L}]_{i-2,i} = 0$ $[\mathbf{L}]_{i-1,i} = -1/h$ $[\mathbf{L}]_{i,i} = 2/h$

La matrice L est symétrique et non nulle seulement pour $i=j-1$, $i=j$ et $i = j+1$: elle est tridiagonale.

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Corrigé de l'Exo2a: vérifier les 3 formules suivantes:

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} hc(x_j) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$L_h(f\varphi_j) = hf(x_j).$$

Intégration numérique par la formule composite du trapèze d'une fonction $\ell(x)$:

$$L_h(\ell) = h \left(\frac{1}{2}\ell(x_0) + \ell(x_1) + \ell(x_2) + \cdots + \ell(x_N) + \frac{1}{2}\ell(x_{N+1}) \right).$$

$$L_h(c\varphi_i\varphi_j)=0 \text{ si } i \neq j \text{ et } L_h(c\varphi_i\varphi_{i=j})=hc(x_i)\varphi_i(x_i)\varphi_i(x_i)=hc(x_i)$$

$$L_h(f\varphi_j)=hf(x_j) \text{ car } \varphi_j(x_i)=\delta_{ij}$$

Une méthode de Galerkin: la méthode des éléments finis.

Le système matriciel à résoudre s'écrit sous la forme: $A\vec{u} = \vec{f}$.

avec:
$$A_{ji} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx + \int_0^1 c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

$$A_{ii} = \frac{2}{h} + hc(x_i) \text{ et } A_{i,i-1} = A_{i,i+1} = -\frac{1}{h}; \quad f_j = hf(x_j)$$

Système identique au facteur $1/h$ près de la méthode des différences finies:

Si $\vec{u}$ est le N -vecteur colonne de composantes $u_1, u_2, \dots, u_N$, si $\vec{f}$ est le N -vecteur de composantes $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$ et si A est la $N \times N$ matrice tridiagonale définie par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & & 0 \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

où $c_i = c(x_i)$, alors le problème approché (10.3) (10.4) est clairement équivalent à chercher $\vec{u}$ tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \quad (10.6)$$

Eléments finis 1D de degré 1

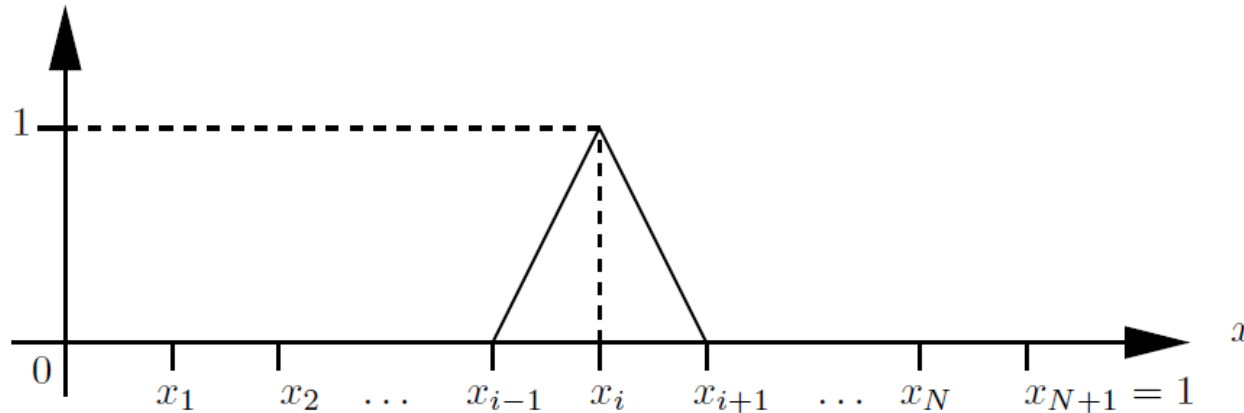
Exo2b:

Soit f une fonction continue de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$. On cherche u de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$$\text{et } u(0) = u(1) = 0.$$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant $h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, \dots, N+1$. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour $N = 4$.



Exo2b: Corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Soit f une fonction continue de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$. On cherche u de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1$$

$$\text{et } u(0) = u(1) = 0.$$

1. Donnez une formulation faible du problème.

Soit $v(x)$ une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ à dérivée continue par morceaux.

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx} \left((1+x) u'(x) \right) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

$$-\left[(1+x) u'(x) v(x) \right]_0^1 + \int_0^1 (1+x) u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

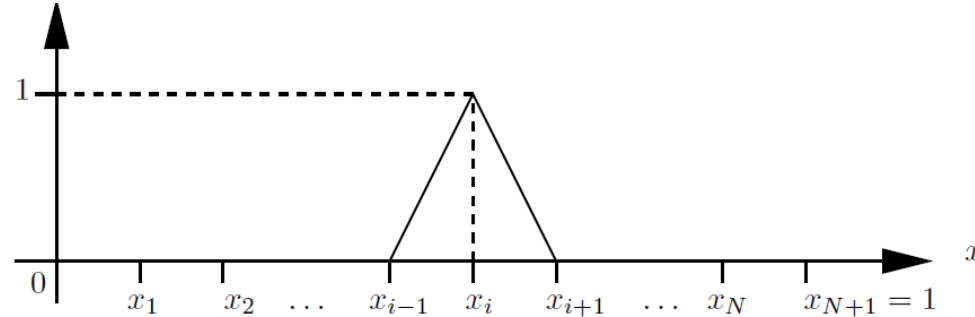
avec $v(0) = v(1) = 0.$, il vient

$$\int_0^1 (1+x) u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \text{ceci pour toute fonction } v(x)$$

Exo2b: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant $h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, \dots, N+1$. Calculez les coefficients de la matrice A.



Soit V_h l'espace vectoriel de dimension N engendré par les fonctions chapeaux notées φ_i

Soit u_h une approximation de la solution dans la base de V_h : $u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) = u_i \varphi_i(x)$

$$\sum_{i=1}^N \int_0^1 (1+x) u_i \varphi_i'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \text{ceci pour toute fonction } v(x) \text{ de } V_h \text{ donc pour}$$

$$\text{tous les } \varphi_j(x): \sum_{i=1}^N \int_0^1 (1+x) u_i \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 (1+x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx = \sum_{i=1}^N A_{ji} u_i = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad \text{pour tout } j = 1 \text{ à } N.$$

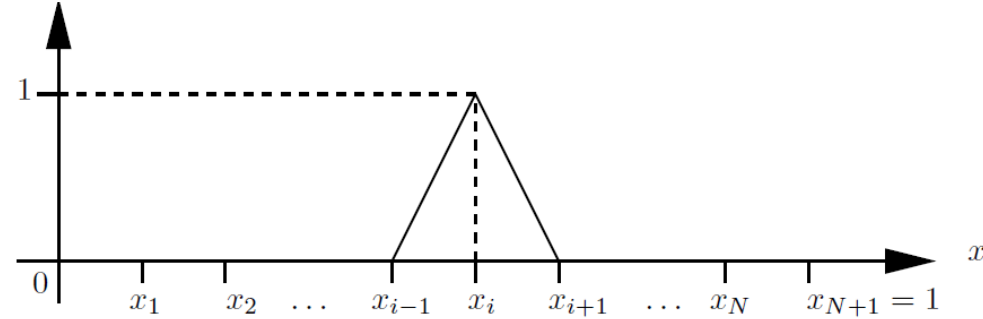
Exo2b: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Soit $\vec{u}$ le N-vecteur des u_i , alors nous avons:

$$A\vec{u} = \vec{f} \text{ avec } A \text{ symétrique et } f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx$$

$$\text{et } A_{ij} = \int_0^1 (1+x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx$$



$$A_{ii} = \int_0^1 (1+x)\varphi_i'(x)\varphi_i'(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x)\frac{1}{h^2}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)\frac{1}{h^2}dx$$

$$A_{ii} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x)\frac{1}{h^2}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x)\frac{1}{h^2}dx = \frac{1}{2h}(2+x_{i-1}+x_i) + \frac{1}{2h}(2+x_{i+1}+x_i)$$

$$A_{ii} = \frac{1}{2h}(4+x_{i-1}+2x_i+x_{i+1}) = \frac{1}{2h}(4+(i-1)h+2ih+(i+1)h) = \frac{2}{h}(1+ih)$$

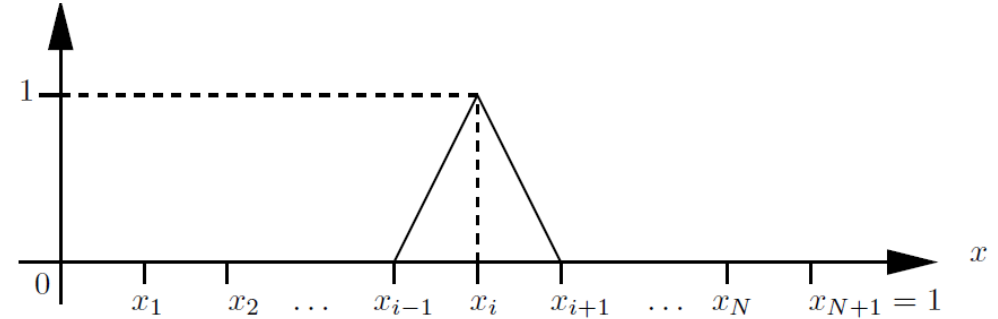
Exo2b: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Soit $\vec{u}$ le N-vecteur des u_i , alors nous avons:

$$A\vec{u} = \vec{f} \text{ avec } f_j = \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx$$

$$\text{et } A_{ij} = \int_0^1 (1+x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)dx$$



$$A_{ii+1} = \int_0^1 (1+x)\phi_i'(x)\phi_{i+1}'(x)dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{1}{h^2} dx \text{ pour } i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$A_{ii+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{1}{h^2} dx = \frac{-1}{2h} (2+x_{i+1}+x_i)$$

$$A_{ii+1} = \frac{-1}{2h} (2+ih+(i+1)h) = \frac{-1}{2h} (2+h+2ih)$$

Exo2b: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

formule du trapèze avec un pas h constant:

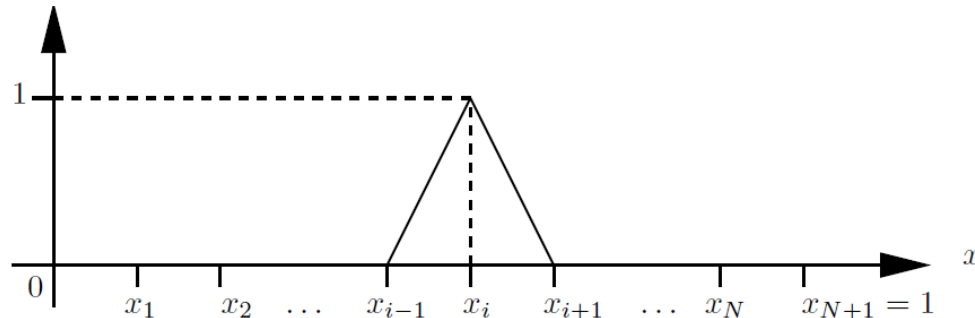
$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \int_0^1 l(x) dx \simeq h \left(\frac{1}{2} l(x_0) + l(x_1) + \dots + l(x_N) + \frac{1}{2} l(x_{N+1}) \right) \text{ avec } l(x) = f(x) \varphi_j(x)$$

il vient $f_j = hf(jh)$ pour $j = 1$ à N

In fine, on obtient le système linéaire suivant pour $N = 4$ et donc $h = 1/5$:

$$A \vec{u} = \vec{f}$$

$$\begin{pmatrix} 2(1+h)/h & -(2+3h)/2h & 0 & 0 \\ -(2+3h)/2h & 2(1+2h)/h & -(2+5h)/2h & 0 \\ 0 & -(2+5h)/2h & 2(1+3h)/h & -(2+7h)/2h \\ 0 & 0 & -(2+7h)/2h & 2(1+4h)/h \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} hf(h) \\ hf(2h) \\ hf(3h) \\ hf(4h) \end{pmatrix}$$



Eléments finis 1D de degré 1

Exo2c:

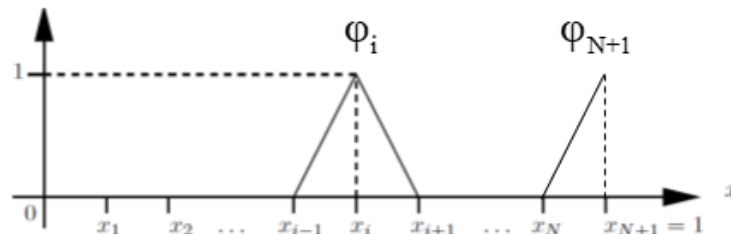
Soit f une fonction continue de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$. On cherche u de $[0.,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$-\frac{d}{dx} \left((1+x) \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1 \quad \text{et } u(0) = 0 \quad \text{et } u'(1) = a$$

1. Donnez une formulation faible du problème (ne pas développer la première dérivée)
2. Appliquez la méthode de Galerkin de degré 1 (fonctions chapeau) en notant $h = 1/(N+1)$ et $x_j = jh$ avec $j = 0, 1, \dots, N+1$. Calculez les coefficients de la matrice A et écrire cette matrice pour $N = 3$. Comme la solution $u(x)$ n'est pas connue en $x = 1$, on définit en plus la fonction linéaire φ_{N+1} par :

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_N}{x_{N+1} - x_N} & \text{si } x_N \leq x \leq x_{N+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le graphe des fonctions φ_i pour $i=1,2, \dots, N, N+1$ est donc le suivant :



Exo2c: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

On intègre par parties

$$-\int_0^1 \frac{d}{dx}((1+x)u'(x))v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

$$-\left[(1+x)u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

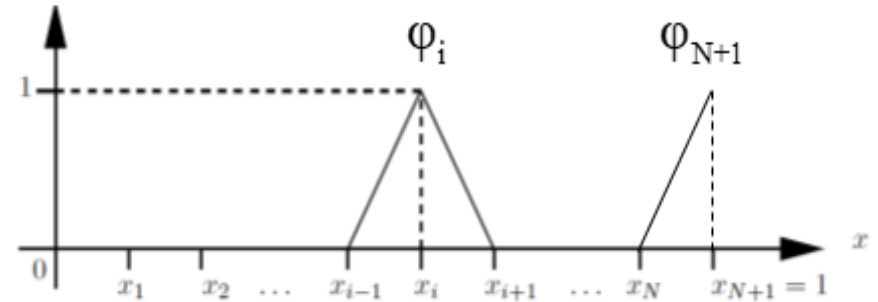
avec $v(0) = 0$ et $u'(1) = a$, il vient

$$\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx - 2av(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad (\text{eq.1}) \text{ ceci pour toute fonction } v(x)$$

$$u_h = \sum_{i=1}^{N+1} u_i \phi_i(x) \quad \text{et } v(x) = \phi_j(x) \quad (\text{NB: } v(1) = \phi_{N+1}(1) = 1) \quad \text{pour } j = 1 \text{ à } N+1$$

$$\sum_{i=1}^{N+1} u_i \int_0^1 (1+x)\phi_i'(x)\phi_j'(x)dx = \sum_{i=1}^{N+1} u_i A_{ji} = \int_0^1 f(x)\phi_j(x)dx, \quad \forall j=1, N$$

$$\text{et } \sum_{i=1}^{N+1} u_i \int_0^1 (1+x)\phi_i'(x)\phi_{N+1}'(x)dx = 2a + \int_0^1 f(x)\phi_{N+1}(x)dx \quad \text{quand } j = N+1$$



Exo2c: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Formulation $Au = f$, A reste symétrique.

$$A_{ii} = \int_0^1 (1+x) \varphi_i'(x) \varphi_i'(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1+x) \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{1}{h^2} dx \quad \text{pour } i \leq N$$

$$A_{ii} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (1+x) dx = \frac{1}{h^2} \frac{2h}{2} (1+x_{i-1} + 1+x_{i+1}) = \frac{1}{h} (2+2x_i) = \frac{2}{h} (1+ih)$$

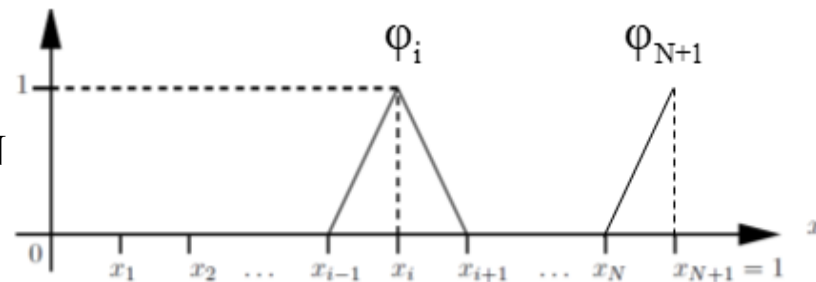
$$A_{ii+1} = \int_0^1 (1+x) \varphi_i'(x) \varphi_{i+1}'(x) dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{1}{h^2} dx \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$A_{ii+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1+x) \frac{1}{h^2} dx = \frac{-1}{2h} (2+x_{i+1}+x_i)$$

$$A_{ii+1} = \frac{-1}{2h} (2+ih+(i+1)h) = \frac{-1}{2h} (2+h+2ih)$$

$$\text{NB: } A_{N,N+1} = \frac{-1}{2h} (2+h+2Nh) = \frac{-1}{2h} (2-h+2(N+1)h) = \frac{-1}{2h} (4-h) \quad \text{puisque } (N+1)h = 1$$

$$A_{N+1,N+1} = \int_0^1 (1+x) \varphi_{N+1}'(x) \varphi_{N+1}'(x) dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_N}^{x_{N+1}} (1+x) dx = \frac{h}{2h^2} (1+x_N + 1+x_{N+1}) = \frac{1}{2h} (1+1-h+1+1) = \frac{1}{2h} (4-h)$$



Exo2c: corrigé

Eléments finis 1D de degré 1

Formulation $Au = f$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = hf(x_j) \text{ pour } j \leq N$$

en posant $l(x) = f(x) \varphi_j(x)$, fonction continue, dans la formule du trapèze, $f_{N+1} = 2a + \frac{h}{2} f(1)$

Avec $N = 3$ et $h = 1/4$, nous avons 4 inconnues .

$$A \vec{u} = \vec{f}, \quad \begin{pmatrix} 2(1+h)/h & -(2+3h)/2h & 0 & 0 \\ -(2+3h)/2h & 2(1+2h)/h & -(2+5h)/2h & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2h}(2+h+2ih) & \frac{2}{h}(1+ih) & \frac{-1}{2h}(2+h+2ih) \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2h}(4-h) & (4-h)/2h \end{pmatrix} \vec{u} = \begin{pmatrix} hf(h) \\ hf(2h) \\ hf(ih) \\ 2a + hf(1)/2 \end{pmatrix}$$

Dernière ligne pour h tendant vers 0. en remarquant que u_N tend vers u_{N+1} (u est continue):

$$-(4-h)u_N/2h + (4-h)u_{N+1}/2h \approx -2u_N/h + 2u_{N+1}/h \approx 2a$$

$$\left(\frac{u_{N+1} - u_N}{h} \approx \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} = a \text{ qui est bien la condition aux limites en } x=1.$$