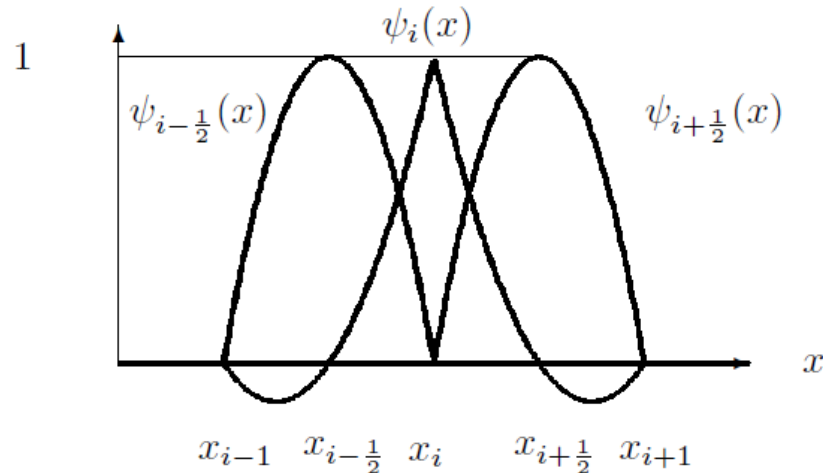


Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a:

Calculez le terme A_{ii} pour i paire puis pour i impaire avec un pas d'espace h constant et dans le cas où $c = 0$.

$$A_{ii} = \int_0^1 (\varphi_i')^2 dx$$

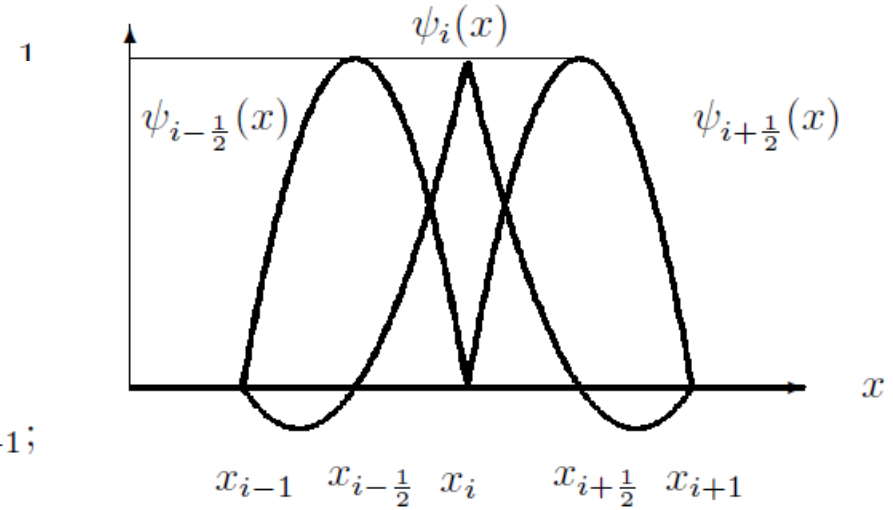


Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a: corrigé

Aii pour i paire et h constant

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$



Avec un pas h constant:

$$\psi_i(x) = \frac{2(x - x_{i-1})(x - x_{i-1/2})}{hh} \text{ sur } [x_{i-1}, x_i]$$

$$\psi_i(x) = \frac{2(x - x_{i+1})(x - x_{i+1/2})}{hh} \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]$$

Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a: corrigé

Aii pour i paire: 1^{ère} méthode

$$x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2 \text{ donc}$$

$$\psi_i'(x) = \frac{2(x-x_{i-1/2})+2(x-x_{i-1})}{hh} = \frac{2u+2u-h}{hh} = \frac{4u-h}{hh} \text{ avec } u = x-x_{i-1} \text{ variant de } 0 \text{ à } h$$

$$x_{i+1/2} = x_i + h/2 \text{ et } x_{i+1} = x_i + h \text{ donc}$$

$$\psi_i'(x) = \frac{2(x-x_{i+1/2})+2(x-x_{i+1})}{hh} = \frac{2v-h+2v-2h}{hh} = \frac{4v-3h}{hh} \text{ avec } v = x-x_i \text{ variant de } 0 \text{ à } h$$

$$A_{ii} = \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du + \int_0^h \left(\frac{4v-3h}{hh} \right)^2 dv = \frac{1}{h^4} \int_0^h \left((4u-h)^2 + (4u-3h)^2 \right) du$$

$$A_{ii} = \frac{1}{h^4} \int_0^h (32u^2 - 32uh + 10h^2) dx = \frac{1}{h^4} \left(\frac{32}{3} h^3 - 16h^3 + 10h^3 \right)$$

$$A_{ii} = \frac{2}{h} \left(\frac{16}{3} - 3 \right) = \frac{14}{3h} \approx 4.666/h \text{ pour } i \text{ paire.}$$

Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a: corrigé

Aii pour i paire: 2^{ème} méthode

$$x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2 \text{ donc}$$

$$\psi_i'(x) = \frac{2(x-x_{i-1/2})+2(x-x_{i-1})}{hh} = \frac{2u+2u-h}{hh} = \frac{4u-h}{hh} \text{ avec } u = x-x_{i-1} \text{ variant de } 0 \text{ à } h$$

$$x_{i+1/2} = x_{i+1} - h/2 \text{ donc}$$

$$\psi_i'(x) = \frac{2(x-x_{i+1/2})+2(x-x_{i+1})}{hh} = \frac{2v+h+2v}{hh} = \frac{4v+h}{hh} \text{ avec } v = x-x_{i+1} \text{ variant de } -h \text{ à } 0$$

$$A_{ii} = \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du + \int_{-h}^0 \left(\frac{4v+h}{hh} \right)^2 dv = \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du - \int_h^0 \left(\frac{-4u+h}{hh} \right)^2 du \text{ (avec } u = -v \text{ dans la seconde intégrale)}$$

$$A_{ii} = \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du + \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du = 2 \int_0^h \left(\frac{4u-h}{hh} \right)^2 du$$

$$A_{ii} = \frac{2}{h^4} \int_0^h (16u^2 - 8uh + h^2) dx = \frac{2}{h^4} \left(\frac{16}{3} h^3 - 4h^3 + h^3 \right)$$

$$A_{ii} = \frac{2}{h} \left(\frac{16}{3} - 3 \right) = \frac{14}{3h} \approx 4.666/h \text{ pour } i \text{ paire.}$$

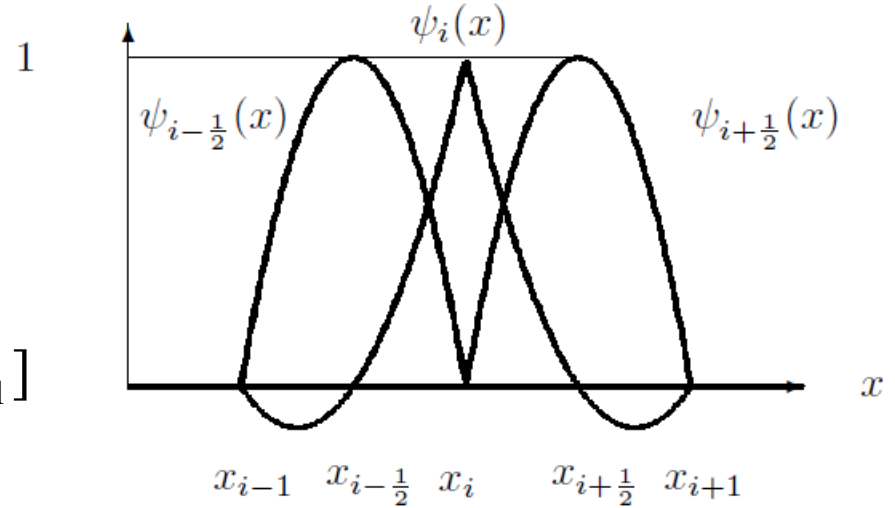
Eléments finis 1D de degré 2

Exo3a: corrigé

Aii pour i impaire et h constant

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \psi_{i+1/2}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]$$



$$A_{ii} \text{ (i impaire)} = \int_0^1 (\varphi_i')^2 dx = \frac{16}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((x-x_{i+1}) + (x-x_i))^2 dx$$

$$A_{ii} \text{ (i impaire)} = \frac{16}{h^4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u-h+u)^2 du = \frac{16}{h^4} \int_0^h (2u-h)^2 du \text{ avec } u = x-x_i = x-x_{i+1}+h$$

$$A_{ii} \text{ (i impaire)} = \frac{16}{h^4} \frac{1}{6} \left[(2u-h)^3 \right]_0^h = \frac{16}{h^4} \frac{1}{6} (h^3 + h^3) = \frac{16}{3h} \approx 5.333/h$$

Méthode des EF

Exo 3b:

Étant donné deux fonctions c et f continues sur $[0,1]$, trouver $u(x)$ doublement dérivable sur $[0,1]$ telle que:

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

Comme la condition aux limites (CL) en $x = 0$ porte sur $u'(x)$, on définit la fonction ϕ_0 centrée en 0 pour déterminer l'inconnue $u(0)$ approximation de u en $x = 0$.

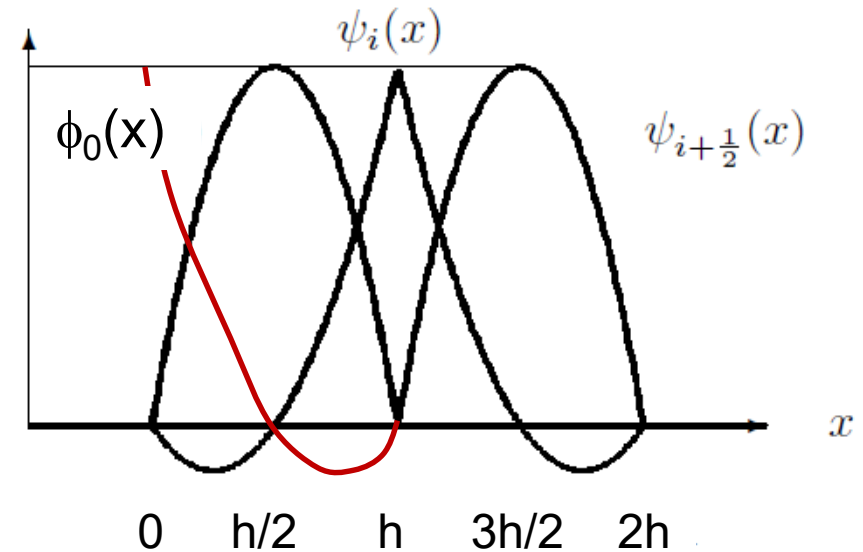
fonction $\phi_0(x)$ vaut avec un pas h constant: $\phi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh}$ sur $[0,h]$

Ecrire les formulations faibles puis de Galerkin avec des éléments quadratiques et définir A et f :

$$A\vec{u} = \vec{f}$$

En prenant $c(x)=0$, montrer que $A_{00}=7/3h$, $A_{01}=-8/3h$ et $A_{02}=1/3h$.

Ecrire la première ligne du système linéaire puis faire tendre h vers 0 pour retrouver la C.L. en $x = 0$.



Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

On multiplie par une fonction v une fois continuellement dérivable sur $[0,1]$ et on intègre de 0 à 1:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

En intégrant par parties le premier terme, nous avons :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Comme la condition aux limites (CL) en $x = 0$ porte sur $u'(x)$, on conserve le terme $u'(0)v(0)$ et on définit la fonction ϕ_0 centrée en 0 pour déterminer l'inconnue $u(0)$ approximation de u en $x = 0$.

avec $v(1) = 0$ et $u'(0) = a$, il vient

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u(x)v(x)dx + av(0) = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \text{pour toute fonction } v(x)$$

Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

$$u_h = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x) \quad \text{et } v(x) = \varphi_j(x) \quad (\text{NB: } v(0) = \varphi_0(0) = 1) \quad \text{pour } j = 0 \text{ à } N = 2M+1$$

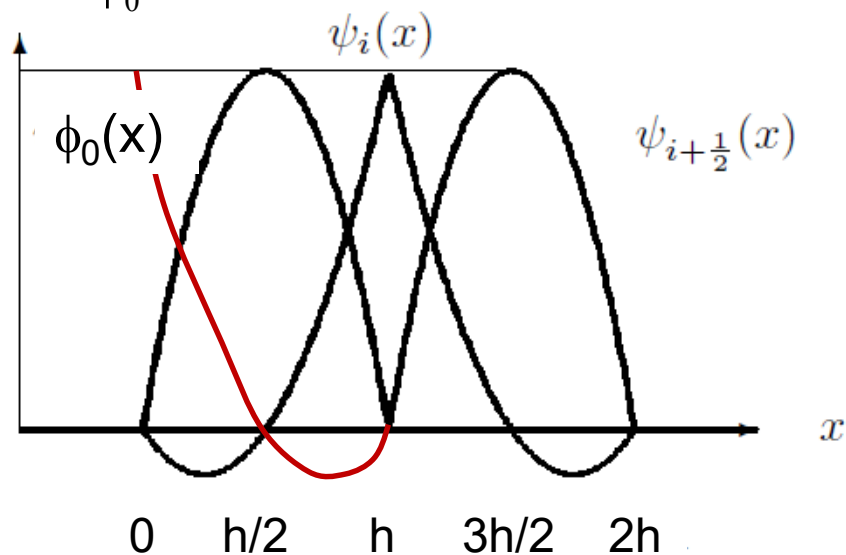
$$\sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x)) dx = \sum_{i=0}^N u_i A_{ji} = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad \forall j=1, N$$

$$\text{et pour } j = 0: \sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x) \varphi_0'(x) + c(x) \varphi_i(x) \varphi_0(x)) dx + a = \int_0^1 f(x) \varphi_0(x) dx$$

NB: l'e.v. V_h est de dimension $N+1$ puisqu'on a rajouté φ_0 .

fonction $\varphi_0(x)$ vaut avec un pas h constant:

$$\varphi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$



Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

$$\text{pour } j = 0: \sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_0(x)) dx + a = \int_0^1 f(x)\varphi_0(x) dx$$

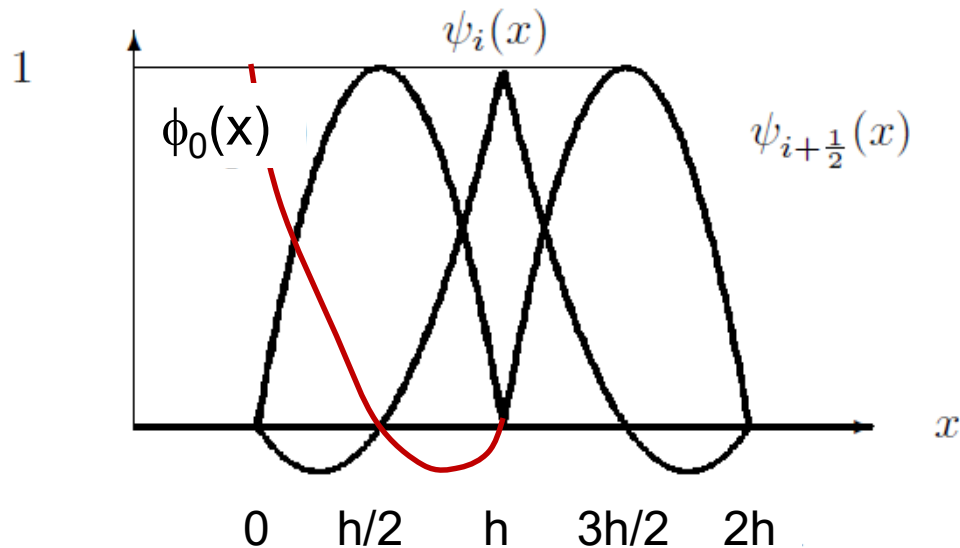
$$A_{00} = \int_0^1 (\varphi_0'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_0(x)\varphi_0(x)) dx \quad \text{et} \quad A_{01} = \int_0^1 (\varphi_1'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_1(x)\varphi_0(x)) dx$$

$$A_{00} = \int_0^h \left(\frac{4x-3h}{hh} \right)^2 dx = \left[\frac{hh}{12} \left(\frac{4x-3h}{hh} \right)^3 \right]_0^h = \frac{hh}{12} \left(\left(\frac{1}{h} \right)^3 - \left(\frac{-3}{h} \right)^3 \right) = \frac{1}{12h} (1+27) = \frac{28}{12h} = \frac{7}{3h}$$

fonction $\varphi_0(x)$ et sa dérivée:

$$\varphi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{2(x-h/2) + 2(x-h)}{hh} = \frac{4x-3h}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$



Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

$$\text{pour } j = 0: \sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_0(x)) dx + a = \int_0^1 f(x)\varphi_0(x) dx$$

$$A_{01} = \int_0^1 (\varphi_1'(x)\varphi_0'(x)) dx = \int_0^h \left(\frac{-4(2x-h)}{hh} \right) \left(\frac{4x-3h}{hh} \right) dx = \frac{-4}{h^4} \int_0^h (2x-h)(4x-3h) dx$$

$$A_{01} = \frac{-4}{h^4} \int_0^h (8x^2 - 10hx + 3h^2) dx = \frac{-4}{h^4} \left[\frac{8}{3}x^3 - 5hx^2 + 3xh^2 \right]_0^h = \frac{-4}{h^4} \left(\frac{8}{3}h^3 - 5h^3 + 3h^3 \right) = \frac{-8}{3h}$$

fonction $\varphi_0(x)$ et sa dérivée:

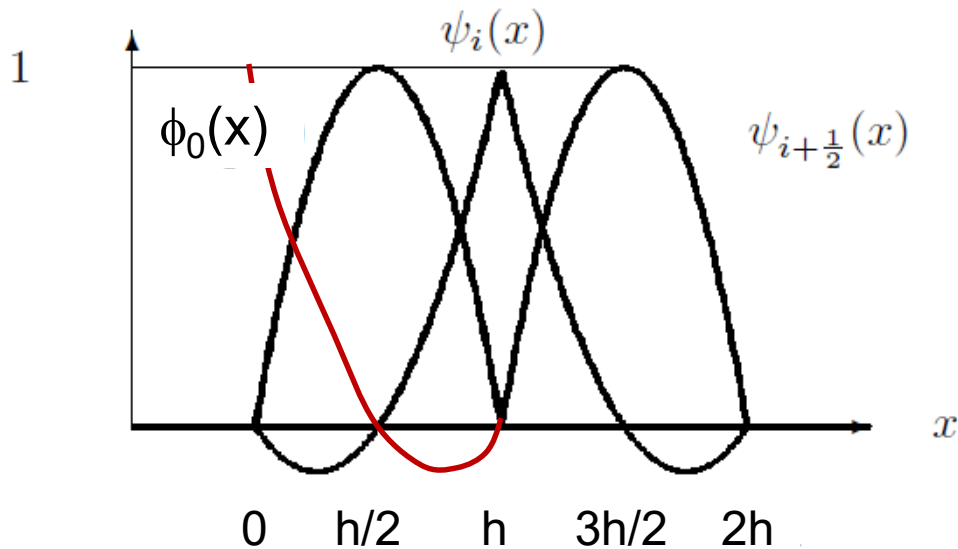
$$\varphi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{2(x-h/2) + 2(x-h)}{hh} = \frac{4x-3h}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

fonction $\varphi_1(x)$ et sa dérivée:

$$\varphi_1(x) = \frac{-4x(x-h)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

$$\varphi_1'(x) = \frac{-4(2x-h)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$



Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

$$\text{pour } j = 0: \sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_0(x)) dx + a = \int_0^1 f(x)\varphi_0(x) dx$$

$$A_{02} = \int_0^1 (\varphi_2'(x)\varphi_0'(x)) dx = \int_0^h \left(\frac{4x-h}{hh} \right) \left(\frac{4x-3h}{hh} \right) dx = \frac{1}{h^4} \int_0^h (4x-h)(4x-3h) dx$$

$$A_{02} = \frac{1}{h^4} \int_0^h (16x^2 - 16hx + 3h^2) dx = \frac{1}{h^4} \left[\frac{16}{3}x^3 - 8hx^2 + 3xh^2 \right]_0^h = \frac{1}{h^4} \left(\frac{16}{3}h^3 - 8h^3 + 3h^3 \right) = \frac{1}{3h}$$

fonction $\varphi_0(x)$ vaut avec h constant:

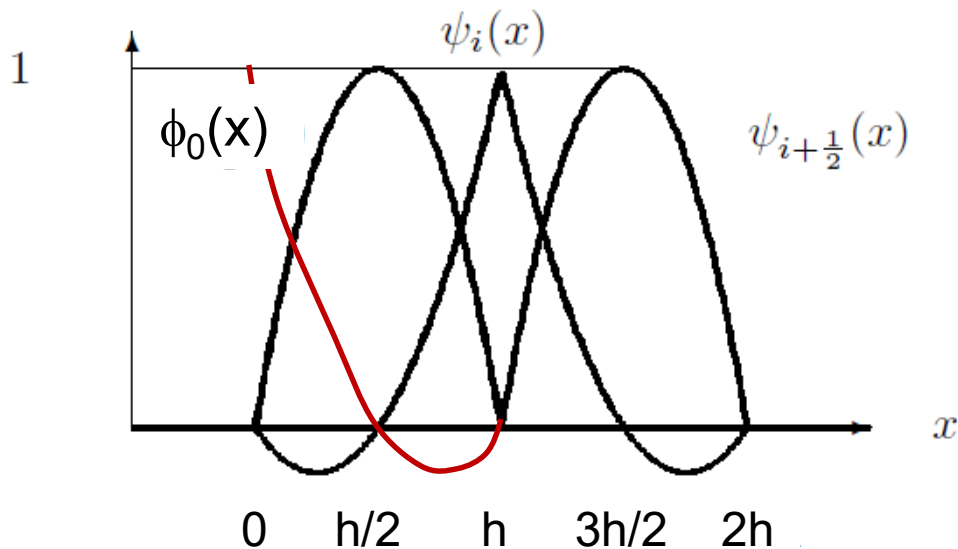
$$\varphi_0(x) = \frac{2(x-h)(x-h/2)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

$$\varphi_0'(x) = \frac{2(x-h/2) + 2(x-h)}{hh} = \frac{4x-3h}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

fonction $\varphi_2(x)$ et sa dérivée:

$$\varphi_2(x) = \frac{2x(x-h/2)}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$

$$\varphi_2'(x) = \frac{4x-h}{hh} \quad \text{sur } [0, h]$$



Exo 3b: corrigé

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad \text{si } 0 < x < 1, \quad \text{avec } u'(0) = a \text{ et } u(1) = 0$$

pour $j = 0$: $\sum_{i=0}^N u_i \int_0^1 (\varphi_i'(x)\varphi_0'(x) + c(x)\varphi_i(x)\varphi_0(x)) dx + a = \int_0^1 f(x)\varphi_0(x) dx = \frac{h}{2} f(0)$ par la formule du trapèze

$$A_{00}u_0 + A_{01}u_1 + A_{02}u_2 + a = \frac{h}{2} f(0)$$

$$L_h(1) \approx \int_0^1 l(x) dx \text{ est donnée par:}$$

$$\frac{7}{3h}u_0 - \frac{8}{3h}u_1 + \frac{1}{3h}u_2 + a = \frac{h}{2} f(0)$$

$$L_h(\ell) = h \left(\frac{1}{2}\ell(x_0) + \ell(x_1) + \ell(x_2) + \cdots + \ell(x_N) + \frac{1}{2}\ell(x_{N+1}) \right)$$

Quand h tend vers 0.:

$$\frac{u_2 - u_0}{h} \approx a \text{ soit } u_2 = u_0 + ah ; \quad \frac{7}{3h}u_0 - \frac{8}{3h}u_1 + \frac{u_0 + ah}{3h} + a = 0$$

$$\frac{8}{3h}u_0 - \frac{8}{3h}u_1 + \frac{a}{3} + a = 0 = \frac{8}{3h}u_0 - \frac{8}{3h}u_1 + \frac{4a}{3} = 0$$

$$8u_0 - 8u_1 + 4ha = 0 \text{ soit } 2(u_1 - u_0) = ah$$

$$\text{i.e. } \frac{u_1 - u_0}{h/2} = a = \text{CL en } x = 0$$

